تهیه کننده و تنظیم کننده : سید حامد موسوی نژاد

ریاضیات مهندسی

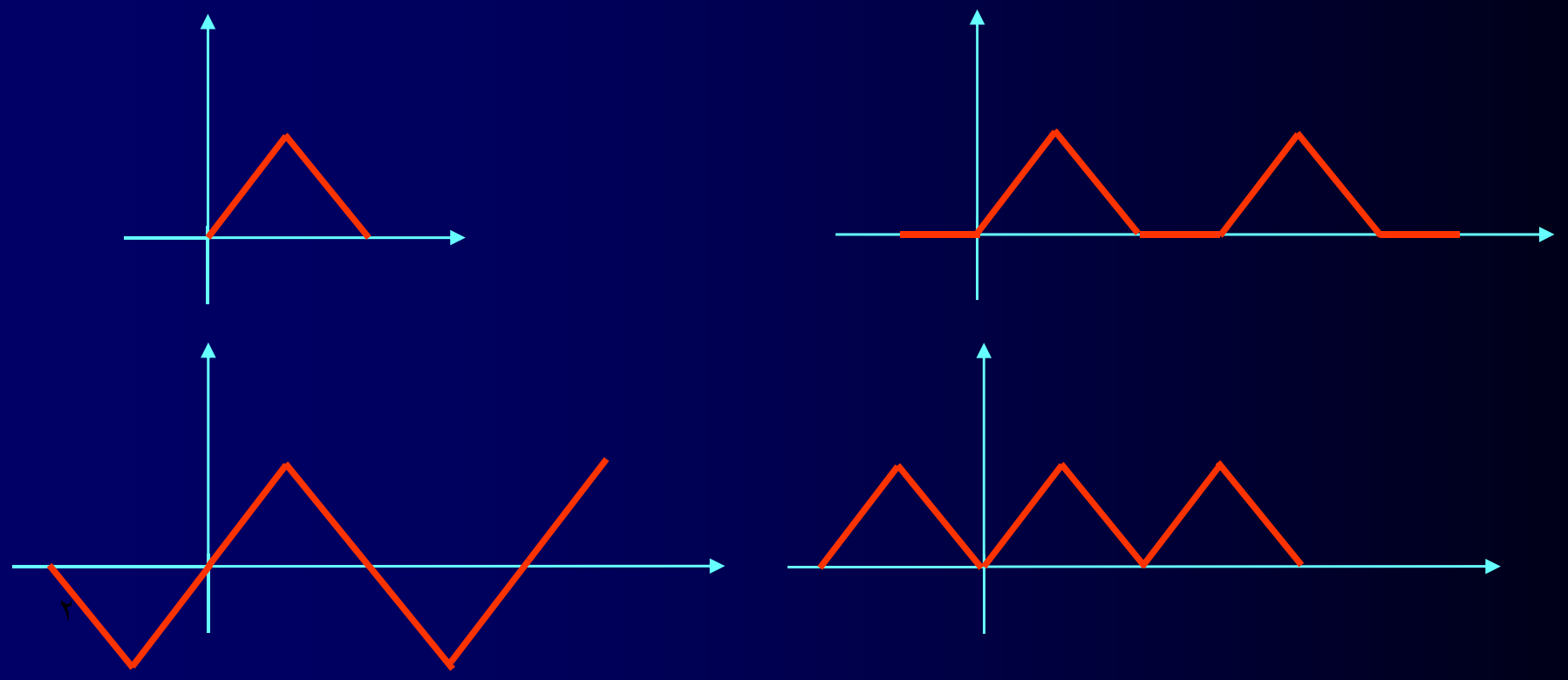
جلسه سوم

مباحث این جلسه :

- بسط نیم دامنه ای
  - گسترش زوج
  - گسترش فرد
- مشتق گیری و انتگرال گیری جمله به جمله از سری فوریه

- بسط نیم دامنه ای

اگر تابعی بصورت $y=f(x)\ ;\ 0 < x < \ell$ باشد و بخواهیم بصورت سری فوریه نمایش دهیم ، به دلیل این که تابع متناوب نیست دارای سری فوریه نمی باشد؛ ولی توابعی هستند که سری فوریه آن ها در فاصله $0 \le x \le \ell$ بر $f(x)$ منطبق است و تعداد آن ها بسیار زیاد است.



دو تابع از این بینهایت تابع ، اهمیت بیشتری دارند که یکی از آن ها گسترش زوج $f(x)$ و دیگری گسترش فرد $f(x)$ می باشد .

$$\begin{cases} f_1(x) = f(x) \quad ; \quad 0 < x < \ell \\ f_1(x) = f(-x) \quad ; \quad -\ell < x < 0 \end{cases}$$

گسترش زوج $T=2\ell$

که دارای سری فوریه کسینوسی زیر است:

$$f_1(x) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \qquad a_o=0$$

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx$$

گسترش فرد

$$\begin{cases} f_2(x) = f(x) & ; \quad 0 < x < \ell \\ f_2(x) = -f(-x) & ; \quad -\ell < x < 0 \end{cases}$$

که دارای سری فوریه سینوسی زیر است:

$$f_2(x) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx$$

مثال) سری های فوریه سینوسی و کسینوسی متناظر با f(x) را بیابید .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۲k}{l}x & ; \ ۰ < x < \frac{l}{۲} \\ \frac{۲k}{l}(l-x) & ; \ \frac{l}{۲} < x < l \end{cases}$$

حل :

$$b_n = \frac{۲}{l}\int_{۰}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx =$$

$$\frac{۴k}{l^۲}\left[\int_{۰}^{l/۲} x\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx + \int_{l/۲}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\right]$$

$$b_n = \frac{۴k}{l^۲}\left[-\frac{lx}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_{۰}^{l/۲} + \frac{l^۲}{n^۲\pi^۲}\sin\frac{n\pi}{l}x\Big|_{۰}^{l/۲} - \frac{l(l-x)}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_{l/۲}^{l} - \frac{l^۲}{n^۲\pi^۲}\sin\frac{n\pi}{l}x\Big|_{l/۲}^{l}\right]$$

$$b_n = \frac{۴k}{ln\pi}\left[-\frac{l}{۲}\cos\frac{n\pi}{۲} + \frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{۲} + \frac{l}{۲}\cos\frac{n\pi}{۲} + \frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{۲}\right] = \frac{۸k}{n^۲\pi^۲}\sin\frac{n\pi}{۲}$$

سری فوریه سینوسی متناظر با f(x) :

$$f(x) = \frac{۸k}{\pi^{۲}} \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^{۲}} \sin\frac{n\pi}{۲} \sin\frac{n\pi}{l}x \;;\quad ۰<x<l$$

سری فوریه کسینوسی متناظر با f(x) :

$$a_n = \frac{۴k}{l^{۲}} \left[\int_{۰}^{l/۲} x \cos\frac{n\pi}{l}x\,dx + \int_{l/۲}^{l} (l-x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx \right]$$

$$a_n = \frac{۴k}{n^{۲}\pi^{۲}}\left(۲\cos\frac{n\pi}{۲} - \cos n\pi - ۱\right) \qquad a_{۰} = \frac{k}{۲}$$

$$\longrightarrow \quad f(x) = \frac{k}{۲} + \frac{۴k}{\pi^{۲}} \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^{۲}}\left(۲\cos\frac{n\pi}{۲} - \cos n\pi - ۱\right)\cos\frac{n\pi}{l}x$$

- مشتق گیری و انتگرال گیری جمله به جمله از سری فوریه

قضیه۱) اگر سری فوریه تابع پیوسته قطعه ای $f(x)$ در فاصله تناوب $-\ell < x < \ell$ به صورت زیر بیان شده باشد:

$$f(x)= a_\circ + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right)$$

آن گاه:

$$\int_\circ^x f'(x)\, dx' = a_\circ x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi}{l} x - b_n \cos \frac{n\pi}{l} x \right)$$

قضیه ۲) فرض کنید $f(x)$ تابعی پیوسته در فاصله $[-\ell , \ell]$ باشد و $f(-\ell)=f(\ell)$ و همچنین $f'(x)$ در این فاصله پیوسته قطعه ای باشد ؛ آن گاه سری فوریه تابع $f'(x)$ را می توان با مشتق گیری جمله به جمله از سری فوریه $f(x)$ بدست آورد و سری حاصل از این مشتق گیری در هر نقطه x به سمت $\frac{1}{2}[f'(x+) + f'(x-)]$ همگراست .

$$f(x)= a_\circ + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right)$$

$$f'(x) = F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-n\pi}{l} a_n \sin \frac{n\pi}{l} x + \frac{n\pi}{l} b_n \cos \frac{n\pi}{l} x \right)$$

در نقاطی که $f'(x)$ پیوسته نیست :

$$F(x) = \frac{1}{2} [f'(x+) + f'(x-)]$$

مثال) سری فوریه $f(x)=x \;;\; -\pi < x < \pi$ را بیابید و با انتگرال گیری از سری حاصل، سری فوریه تابع x^2 را بیابید .

$$x = ۲\left[\sin x - \frac{\sin ۲x}{۳} + \frac{\sin ۳x}{۳} - \cdots\right]$$

با انتگرال گیری داریم :

$$\frac{x^۲}{۲} = ۲\left[-\cos x + \frac{\cos ۲x}{۲^۲} - \frac{\cos ۳x}{۳^۲} + \cdots\right] + C$$

برای به دست آوردن c از طرفین تساوی در فاصله π- تا π انتگرال می گیریم و می دانیم انتگرال cos با توجه به مساحت زیر نمودار 0 می باشد .

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^۲}{۲}\, dx = C\int_{-\pi}^{\pi} dx$$

$$\longrightarrow \quad C = \frac{\pi^۲}{۶} \quad \longrightarrow \quad x^۲ = \frac{\pi^۲}{۳} + ۴\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n^۲} \cos nx$$

انتگرال فوریه

مشاهده می شود که هر تابع متناوب دارای سری فوریه و هر تابع با حوزه ی تعریف متناهی دارای سریهای فوریه متناظر است. اما تابع $y=f(x)\ ;\ -\infty < x < \infty$ دارای سری فوریه نیست ولی می توان به صورت حد سری فوریه تابع دیگری آنرا نمایش داد .

چنین سری فوریه را می توان بصورت انتگرال نمایش داد که به همین علت آنرا انتگرال فوریه می نامند و به صورت زیر محاسبه می شود :

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}[a(w)\cos wx+b(w)\sin wx]\,dw$$

$$a(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos wx\,dx$$

$$b(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin wx\,dx$$

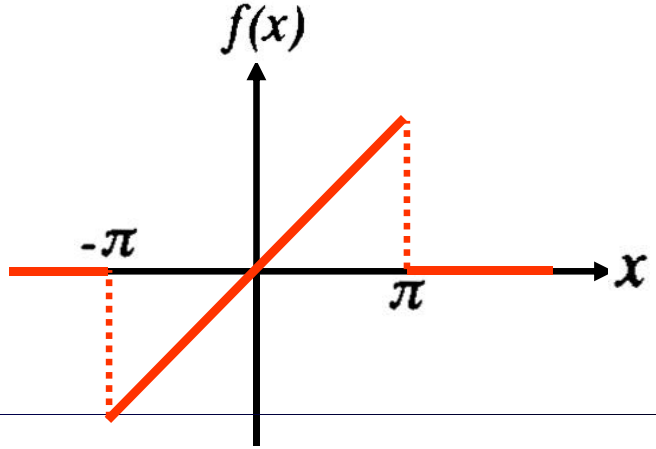
شرط جواب :

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx=M<\infty$$

مثال) انتگرال فوریه تابع زیر را به دست آورید .

$$f(x)=\begin{cases} x & |x|<\pi \\ 0 & |x|>\pi \end{cases}$$

حل :



$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = 2\int_{0}^{\pi} x\, dx = \pi^2$$

زوج

بنابراین انتگرال فوریه تابع موجود است؛

فرد

$$a(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos w x dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos w x\, dx = 0$$

$$b(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin w x\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin w x\, dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{w}\cos w x + \frac{1}{w^2}\sin w x\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{w\pi}\left(\frac{1}{w}\sin w\pi - \pi\cos w\pi\right)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{۲}{\pi} \int_{۰}^{\infty} \frac{۱}{w} \left(\frac{۱}{w} \sin w\pi - \pi \cos w\pi \right) \sin w x \, d w$$

قضیه) هرگاه $y= f(x)\ ;\ -\infty< x <\infty$ مطلقا انتگرال پذیر باشد و همواره تکه ای باشد، آن گاه انتگرال فوریه تابع $f(x)$ در نقطه ی x (گسسته) به سمت میانگین حدود چپ و راست تابع در این نقطه همگراست ؛ یعنی :

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}[a(w)\cos wx+b(w)\sin wx]\,dw=\frac{1}{2}[f(x^{+})+f(x^{-})]$$

مثال) سری فوریه تابع $f(x)= x + x^2$ در فاصله $-\pi < x < \pi$ یافته و با توجه به آن مقدار عددی $1+ 1/2^2 + 1/3^2 +\ldots$ را بیابید.

$$x^{2}+x\simeq\frac{\pi^{2}}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{n^{2}}(-1)^{n}\cos nx-\frac{2}{n}(-1)^{n}\sin nx\right]$$

اگر $x = \pi$ قرار دهیم ، آن گاه $f(\pi^{-}) = \pi + \pi^2$ و $f(\pi^{+}) = \pi+ \pi^2$:

$$\frac{\pi^{2}}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^{2}}(-1)^{n}\cos nx=\frac{1}{2}\left[(\pi+\pi^{2})+(-\pi+\pi^{2})\right]=\pi^{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

مثال) با انتگرال گیری از سری فوریه زیر به سری فوریه تابع $|x|$ برسید.

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = f(x) = \begin{cases} -1 & ; \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & ; \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

حل :

ابتدا از طرفین انتگرال نا معین می گیریم :

$$\int \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \int f(x)\, dx = \begin{cases} -x & ; \quad -\pi < x < 0 \\ x & ; \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad c - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} = \begin{cases} -x & ; \quad -\pi < x < 0 \\ x & ; \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

با انتگرال گیری از طرفین تساوی فوق در فاصله π > x > π - ؛ c را می یابیم .

$$c = \frac{\pi}{۲}$$

$$\Longrightarrow \frac{\pi}{۲} - \frac{۴}{\pi} \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\cos(۲n-۱)x}{(۲n-۱)^{۲}} = \begin{cases} -x \ ; & -\pi < x < ۰ \\ x \ ; & ۰ < x < \pi \end{cases}$$

نکته) هر گاه f(x) تابعی زوج باشد، آن گاه :

$$B(\omega)=0 \qquad A(\omega)=۲\int_{۰}^{\infty} f(x)\cos wu\, dx$$

$$f(x)=\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\infty} A(\omega)\cos wx\, dw$$

و هر گاه f(x) تابعی فرد باشد، آن گاه :

$$A(\omega)=0 \qquad B(\omega)=۲\int_{۰}^{\infty} f(x)\sin wu\, dx$$

$$f(x)=\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\infty} B(\omega)\sin wx\, dw$$

U = x

تکلیف سری اول:

۱۰-۱)۱۶-۱۷-۲۵

۱۰-۲)۱۵-۱۶

۱۰-۳)۹-۱۴

۱۰-۴)۳۳-۳۲-۳۵-۹-۱۶

مثال ص ۱۳۴ و مساله ۱۰-۲ ص ۶۸۲

تکلیف سری دوم :

۱۰-۵)۷-۱۵-۱۷-۲۰

۱۰-۹)۲-۴-۱۰-۱۴-۵

ریاضیات مهندسی

جلسه چهارم

مبحث این جلسه : معادله با مشتقات جزئی

معادلات با مشتقات جزئی

تعریف: هر معادله از y, x, u و مشتقات جزئی u نسبت به x, y یک معادله با مشتق جزئی نامیده می شود. در این مبحث فقط دسته ای از معادلات که به معادلات ریاضی - فیزک موسوم هستند پرداخته می شود.

معادلات ریاضی فیزیک نوعی معادلات خطی یا شبه خطی از مرتبه ی دوم هستند.

مرتبه معادله: مرتبه بالاترین مشتق موجود در معادله ، مرتبه معادله است .

معادله

خطی ← نسبت به u , مشتقات جزئی خطی

شبه خطی ← نسبت به مشتقات جزئی مرتبه دوم خطی است

یک معادله شبه خطی در فضای دو بعدی را می توان چنین تعریف کرد :

$$Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}=F(x,y,u,u_x,u_y)$$

C,B,A توابعی از y,x هستند. (دسته های خاصی از معادلات خطی که در مسائل کاربردی از اهمیت ویژه ای برخوردار بوده و به معادلات ریاضی فیزیک موسوم اند و عبارتند از :)

معادلات با مشتقات جزئی خطی مهم مرتبه دو :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \longrightarrow$$ معادله موج یک بعدی

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \longrightarrow$$ معادله گرمای یک بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \longrightarrow$$ معادله لاپلاس دو بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$ ⟶ معادله پواسن دو بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$ ⟶ معادله لاپلاس سه بعدی

در این معادلات : **c ثابت** ، **t زمان** و **x,y,z مختصات دکارتی** هستند .

تعریف : یک معادله با مشتق جزئی را خطی گویند هرگاه نسبت به متغیر وابسته (u) و مشتقات جزئی آن از درجه اول (یعنی توان هر کدام بیش از یک نباشد) باشد.

تعریف : اگر هر جمله ی چنین معادله ای شامل متغیر وابسته (u) یا یکی از مشتقات آن باشد، معادله را **همگن** می نامیم، در غیر اینصورت معادله **غیرهمگن** نامیده می شود .

با توجه به مطالب فوق همه ی معادلات قبلی خطی هستند و همه ی آن ها به جز معاله پواسن، همگن می باشند و معادله پواسن غیر همگن است.

با توجه به مباحث معادلات، برای یک معادله ی با مشتق جزئی ممکن است بی نهایت جواب بدست آید. اما از بین آن ها می توان جواب خاصی را با استفاده از شرایط اولیه (که t یکی از متغیر ها است و در لحظه ی t=0 مقادیر جواب داده شده است) و نیز شرایط کرانه ای (که در x یا y خاصی مقدار جواب مشخص باشد) مشخص نمود.

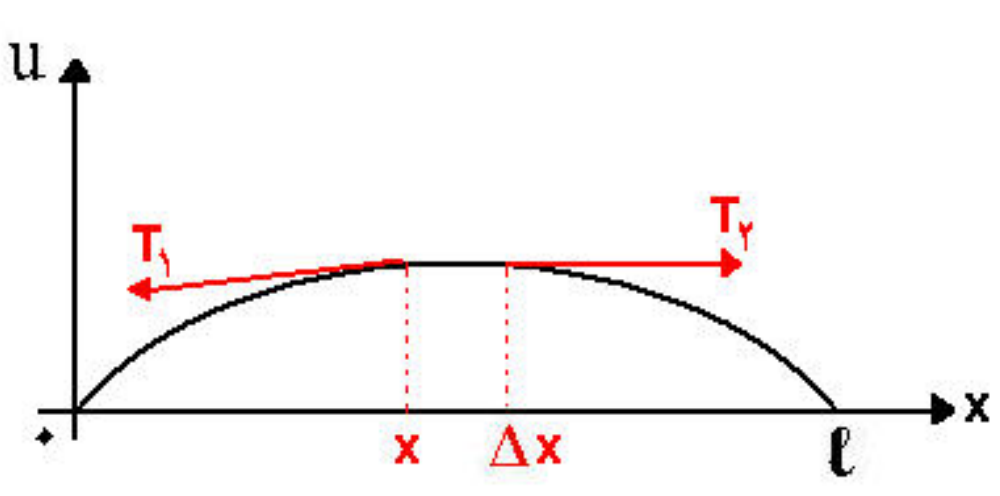
قضیه بنیادی : هر گاه u_1, u_2 جواب هایی از یک معادله با مشتق جزئی همگن خطی در ناحیه معینی باشند، آن گاه :

$$u = c_1u_1 + c_2u_2$$

که در آن c_1, c_2 ثابت های دلخواهی هستند، نیز جوابی از معادله در آن ناحیه هستند .

نخ مرتعش، معادله موج یک بعدی

با توجه به شرائط و حرکت نخ مرتعش تنها در یک جهت، آن گاه معادله ی آن بصورت یک معادله ی موج یک بعدی بدست می آید.



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

علت اینکه c^2 انتخاب شده این است که مشخص شود که حتما مثبت است.

با توجه به این که نخ در x=0 و x= ℓ ثابت است پس برای همه ی زمان ها در شرط کرانه ای داریم :

$$u(0, t) = 0 \quad , \quad u(\ell, t) = 0$$

همچنین شکل حرکت نخ، به سرعت اولیه (سرعت در لحظه ی t=0) و انحراف اولیه (انحراف در لحظه ی t=0) بستگی دارد لذا دو شرط اولیه برای مساله ایجاد میشود :

$$u(x, 0) = f(x)$$

,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x)$$

بنابراین برای معادله موج باید جوابی بدست آید که در شرایط کرانه ای و همچنین شرایط اولیه صدق کند.

برای حل مساله مراحل زیر صورت می گیرد :

- مرحله ی اول : با به کار بردن روش ضربی، یا روش جدا کردن متغیرها ، دو معادله دیفرانسیل معمولی بدست می آورید:

$$u(x, t) = F(x)\, G(x)$$

- مرحله ی دوم : جواب هایی از این معادلات که در شرایط کرانه ای صدق می کنند به دست آورید.

- مرحله ی سوم : جوابی که در شرایط اولیه صدق کند را محاسبه می کنیم .

نتیجه ای که از مراحل فوق بدست می آید بصورت زیر است:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t\right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$\lambda_n = \frac{c n\pi}{l}$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x)$$

طبق سری فوریه داریم :

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

و با مشتق گیری $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x)$ داریم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n \sin \frac{n\pi}{l} x = g(x) \longrightarrow$$

$$B_n^* \lambda_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \quad \text{و} \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l} \longrightarrow$$

$$B_n^* = \frac{2}{cn\pi} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

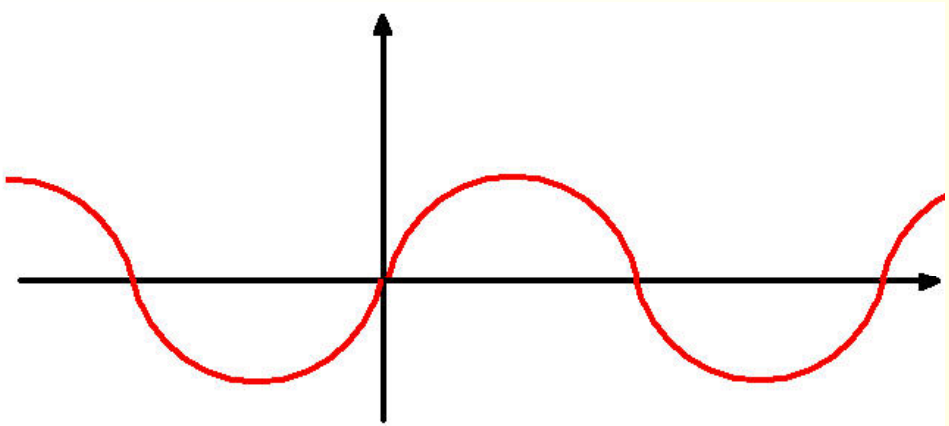
نکته : چنانچه سرعت اولیه $g(x)=0$ باشد آن گاه $B_n^*=0$ می شود و داریم :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \lambda_n t \sin \frac{n\pi}{l} x \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right)$$

و یا؛

$$u(x,t) = \frac{۱}{۲}\left[f^{*}(x - ct) + f^{*}(x + ct) \right]$$



مثال) مطلوبست است جواب متناظر با انحراف اولیه مثلثی معادله موج ، وسرعت اولیه صفر $g(x) = 0$.

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{l}x & ; 0 < x < \frac{l}{2} \\ \frac{2k}{l}(l-x) & ; \frac{l}{2} < x < l \end{cases} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

حل :

با توجه به اینکه $B_n^*=0$ و

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$\frac{4k}{l^2}\left[\int_0^{l/2} x\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx + \int_{l/2}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\right]$$

طبق مثال اول جلسه ی قبل داریم :

$$B_n = \frac{8k}{n^2\pi^2} \sin\frac{n\pi}{2}$$

بنابراین ؛

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\lambda_n t \, \sin\frac{n\pi}{l} x$$

$$\boxed{\frac{8k}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi c}{l}t - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{l}x\cos\frac{3\pi c}{l}t + \cdots\right]}$$

Advanced Engeenering Mathematics

ریاضیات مهندسی

جلسه پنجم

مباحث این جلسه :

- جواب دالامبر معاد له موج
- انواع معادلات با مشتق جزئی خطی

جواب دالامبر معادله موج

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

با تغییر متغیر $v = x+ct$, $z = x-ct$ داریم:

$$v_x = 1 \qquad z_x = 1 \quad \Longrightarrow \quad u_x = u_v v_x + u_z z_x = u_v + u_z$$

حال از u_x یک بار دیگر نسبت به x مشتق می گیریم:

$$u_{xx} = (u_v + u_z)$$

$$= (u_v + u_z)_v \cancel{v_x} + (u_v + u_z)_z \cancel{z_x}$$

$$= (u_{vv} + u_{zv}) + (u_{vz} + u_{zz}) = u_{vv} + 2u_{vz} + u_{zz}$$

با جایگذاری در معادله موج مربوطه داریم :

$$u_{zv} = \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} = 0$$

این معادله با دوبار انتگرالگیری محاسبه می شود:

الف) نسبت به z

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial v} = h(v)$$

h(v) تابع دلخواه از v است .

ب) نسبت به v

$$u = \int h(v)dv + \psi(z)$$

$\psi(z)$ تابعی دلخواه از z است .

این انتگرال نیز تابعی از v با اسم $\varphi(v)$ می باشد

$$\boxed{u(x,t) = \varphi(v) + \psi(z) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)}$$

این جواب به جواب **دالامبر** معادله موج معروف است .

مثلا اگر این مساله را برای $g(x) = v$ و $u(x,0) = f(x)$ حل کنید به پاسخ روبرو خواهیم رسید که مانند قبل است :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f^*(x+ct) + f^*(x-ct)\right]$$

انواع معادلات با مشتق جزئی خطی

اگر این گونه معادلات را در حالت کلی بصورت

$$A\,u_{xx}+2B\,u_{xy}+C\,u_{yy}=F\left(x,y,u,u_x,u_y\right)$$

در نظر بگیریم؛ آن گاه :

الف) معادله را بیضی گون گویند هرگاه

$$AC-B^2>0$$

مانند معادله لاپلاس

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} A=1 \\ B=0 \\ C=1 \end{cases} \;\Rightarrow\; AC-B^2=1>0$$

ب) معادله را سهمی گون گویند هرگاه

$$AC-B^2=0$$

مانند معادله گرما

$$u_t=C^2u_{xx}=\begin{cases} A=C^2 \\ B=0 \\ C=0 \end{cases} \;\Rightarrow\; AC-B^2=0$$

ج) معادله را هذلولی گون گویند هرگاه $AC-B^2<0$

مانند معادله موج

$$u_{tt}=C^2 u_{xx} \Rightarrow \begin{cases} A=C^2 \\ B=0 \\ C=-1 \end{cases} \Rightarrow AC\text{-}B^2=-C^2<0$$

به عنوان مثال معادله تریکومی $yu_{xx}+u_{yy}=0$ از نوع آمیخته است:

$$\begin{cases} A=y \\ B=0 \\ C=1 \end{cases} , \quad B^2-AC=y \begin{cases} y>0 & \text{بیضی گون} \\ y=0 & \text{سهمی گون} \\ y<0 & \text{هذلولی گون} \end{cases}$$

مثال) معادله زیر را با استفاده از تبدیل داده شده حل نمایید.

$$u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}=0 \qquad (v=x \quad , \quad z=x+y)$$

حل:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\times\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v}+\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$u_{xx}=(u_v+u_z)_x=(u_{vv}+u_{zv})\cancel{v_x}+(u_{vz}+u_{zz})\cancel{z_x}$$

$$=u_{vv}+2u_{zv}+u_{zz}=u_{xx}$$

$$u_{xy}=-u_{vz}-u_{z^2}$$

$$u_{yy}=u_{z^2}$$

با جایگذاری داریم:

$$u_{yy}=0 \quad \Rightarrow \quad u_v=h(z) \Longrightarrow u=\int h(Z)\,dV+\psi(z)=v\,h(z)+\psi(z)$$

$$u\,(x,t)=x\,h(x-y)+\psi(x-y)$$

مثال) با جدا کردن متغیرها جوابهای u(x,y) معادلات را به دست آورید.

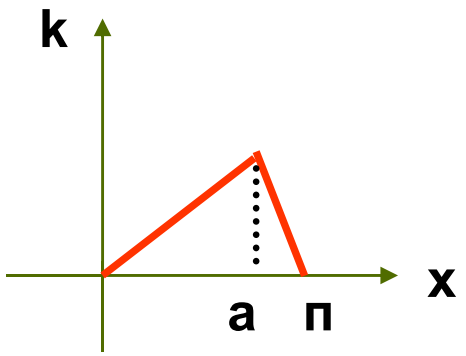
$$\left.\begin{array}{l} u_x = u_y \\ u(x,y) = F(x)\,G(y) \end{array}\right\} \Longrightarrow F'(x)\,G(y) = F(x)\,G'(y)$$

$$\Longrightarrow \frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{G'(y)}{G(y)} = k$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} F' - kF = 0 & \Rightarrow \quad F(x) = e^{kx} \\ G' - kG = 0 & \Rightarrow \quad G(y) = e^{ky} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow u(x,y) = e^{kx}\,e^{ky} = e^{k(x+y)}$$

مثال) مطلوبست انحراف u(x,t) نخ مرتعش به طول ℓ=π با انتهای ثابت $C^2=1$ متناظر با سرعت اولیه صفر و انحراف اولیه



$$f(x)=\begin{cases}\frac{k}{a}x & 0<x<a\\ \frac{k}{a-\pi}(x-\pi) & a<x<\pi\end{cases}$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos(nt)\sin(nx)$$

$$B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{a}\frac{k}{a}x\sin(nx)\,dx+\int_a^{\pi}\frac{k}{a-\pi}(x-\pi)\sin(nx)\,dx\right]=$$

$$\frac{2k}{an^2(\pi-a)}\sin(na)$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2k}{an^2(\pi-a)}\sin(na)\cos(nt)\sin(nx)=$$

$$\frac{2k}{a(\pi-a)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(na)}{n^2}\cos(nt)\ \sin(nx)$$

جریان گرمای یک بعدی

جریان گرما درجه همگن به طور کلی:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u \qquad c = \frac{k}{\sigma\rho}$$

k: رسانایی گرمایی

σ: گرمای ویژه

ρ: چگالی ماده

$$\begin{cases} \nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} & \text{سه بعدی} \\ \nabla^2 u = u_{xx} & \text{تک بعدی} \end{cases}$$

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

این گونه معادلات می توانند مانند معادله موج دارای شرایط اولیه و شرایط کرانه ای باشند .

شرایطی را در نظر بگیرید که دمای نقاط x=0 و x=ℓ مربوط به مفتول صفر باشد .

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \qquad \forall t$$

اگر دمای اولیه مفتول f(x) باشد داریم :

$$u(x,0) = f(x)$$

برای حل مساله از روش جدا سازی استفاده می شود:

مرحله اول: روش تفکیک متغیرها

$$u(x,t) = F(x)\cdot G(t)$$

$$\Rightarrow \quad FG' = c^2 F''(x)\cdot G(t)$$

$$\frac{G'}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k \quad \Rightarrow \begin{cases} k > 0 & \rightarrow \quad u \equiv 0 \\ k = -\rho^2 & \rightarrow \end{cases}$$

مرحله دوم:

$$F'' + \rho^2 F = 0 \quad \Rightarrow \quad F(x) = A\cos(\rho\, x) + B\sin(\rho\, x)$$

$$\Rightarrow \; G' + c^2\rho^2 G = 0$$

$$\rho = \frac{n\pi}{\ell} \begin{cases} F_n(x) = \sin(\frac{n\pi}{l}x) & n = 1,2,\ldots \\ G_n(t) = B_n\, e^{-\lambda n^2 t} & n = 1,2,\ldots \end{cases}$$

مرحله سوم:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin(\frac{n\pi x}{\ell})\,e^{-\lambda n^2 t}$$

$$\lambda_n=\frac{cn\pi}{\ell}$$

شرایط اولیه

$$\Rightarrow\ u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin(\frac{n\pi x}{\ell})=f(x)$$

$$\Rightarrow\ B_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\ \sin(\frac{n\pi x}{\ell})\ dx \qquad \mathrm{n}=1,2,...$$

u(x,0) بسط نیم دامنه ای برای f(x)

با توجه به وجود جمله $e^{-\lambda n^2 t}$ مشاهده می شود با گذشت زمان u(x,t) به سمت صفر میل می کند.

مثال) اگر دمای اولیه برابر $f(x)=\begin{cases} x & 0<x<\ell/2 \\ 1-x & \ell/2<x<\ell \end{cases}$

با فرض $c=1$ و $\ell=\pi$ طول میله $u(0,t)=u(\ell,t)=0$

$$B_n = \frac{2}{\ell}\left[\int_0^{\ell/2} x\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)dx + \int_{\ell/2}^{\ell}(\ell-x)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)dx \right]$$

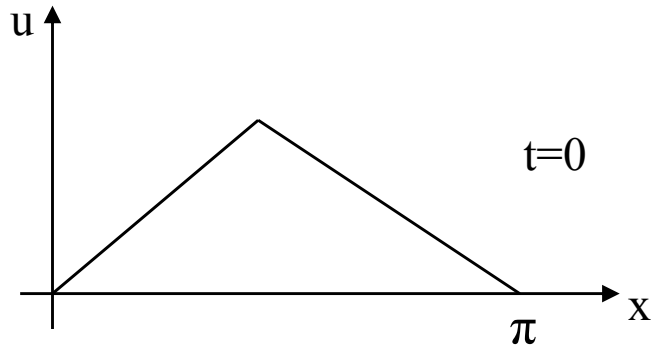
اگر n زوج باشد B_n برابر صفر می شود

$$B_n = \frac{4\ell}{n^2\pi^2} \qquad (n=1,5,9,...)$$

$$B_n = -\frac{4\ell}{n^2\pi^2} \qquad (n=3,7,11,..)$$

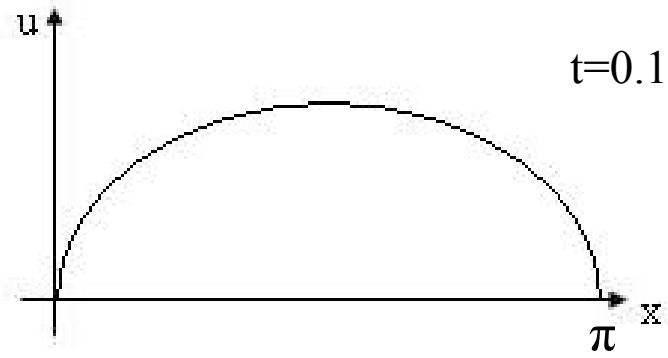
بنابراین :

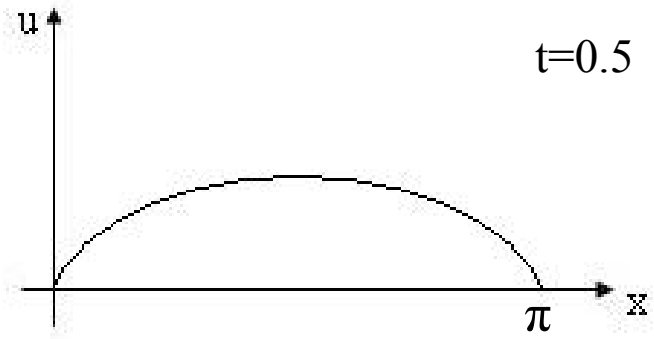
$$u(x,t) = \frac{4\ell}{\pi^2}\left[\sin(\frac{x\pi}{\ell})\, e^{-(c\pi/\ell)^2} - \frac{1}{9}\sin(\frac{3\pi x}{\ell})\, e^{-(3c\pi/\ell)^2 t} + ...\right]$$

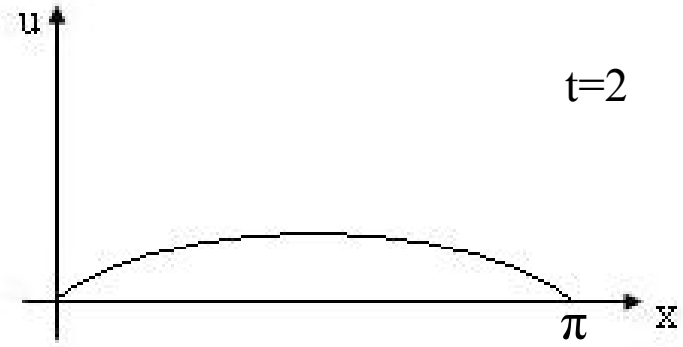


$$t \to \infty$$

$$u(x,t) \to \infty$$







جریان گرما در یک میله نامتناهی

در این حالت شرایط کرانه ای حذف می شود .

با توجه به معادله گرمای یک بعدی

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

و $u(x,0)=f(x)$ $-\infty<x<\infty$ آن گاه :

$$u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\ e^{[-\frac{(x-v)^2}{4c^2 t}]}\ dv$$

و با تغییر متغیر

$$z = (v-x)/2c\sqrt{t}$$

داریم :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+2cz\sqrt{t})\ e^{-z^2} dz$$

مثال) دما در میله نامتناهی

$$f(x)=\begin{cases} u_0 = 100^\circ c & |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$$

$$u(x,t)=\frac{u_0}{2c\sqrt{t}}\int_{-1}^{1}\exp[-\frac{(x-v)^2}{4c^2t}]dv$$

و یا

$$u(x,t)=\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int_{-(1+x)/2c\sqrt{t}}^{(1-x)/2c\sqrt{t}} e^{-z^2}\, dz \qquad z=(v-x)/2c\sqrt{t}$$

حل مسأله موج در فضای یک بعدی (به طور کلی)

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} = F(x,t) \qquad 0 < x < \ell \qquad t > 0$$

$$u(0,x) = f(x) \qquad 0 < x < \ell$$

$$u_t(0,x) = g(x) \qquad 0 < x < \ell$$

$$u(0,t) = p(t) \quad t \geq 0; \quad u(\ell,t) = q(t) \quad t \geq 0$$

برای حل مسأله به دنبال جوابی بصورت(1) $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$ می پردازیم .

و w(x,t) را طوری انتخاب می کنیم، که v(0,t)=0 , v(ℓ,t)=0 . در این صورت باید :

$$w(0,t) = p(t) \quad , \quad w(\ell,t) = q(t)$$

بدیهی است که برای w جواب یکتا وجود ندارد.ولی برای سادگی دنبال جوابی بصورت زیر می گردیم :

$$w(x,t) = ax + b$$

$$w(0,t) = p(x) \Rightarrow b = p(t)$$

$$w(\ell,t) = q(t) \quad \Rightarrow a = \frac{1}{\ell}(q(t) - p(t))$$

$$\Rightarrow w(x,t) = \frac{1}{\ell}(q(t) - p(t))x + p(t) \qquad u(x,t) = v(x,t) + \frac{1}{\ell}(q(t) - p(t))x + p(t) \qquad (2)$$

حال مسأله مربوط به v را می یابیم :

از رابطه ۲

$$u_{tt} = v_{tt} + \frac{x}{\ell}[\ddot{q}(t) - \ddot{p}(t)] + \ddot{p}(t)$$

$$u_{xx} = v_{xx}$$

بنا براین در مساله اصلی

$$v_{tt} + \frac{x}{l}(\ddot{q} - \ddot{p}) + \ddot{p} - c^2 v_{xx} = F(x,t)$$

و از آن جا $v_{tt} - c^2 v_{xx} = F_1(x,t)$ بدست می آید :

$$F_1(x,t) = F(x,t) - \frac{x}{l}[\ddot{q} - \ddot{p}] - \ddot{p}$$

با توجه به شرط مساله

$$u(x,0) = v(x,0) + \frac{1}{l}[q(0) - p(0)]x + p(0) = f(x)$$

$$\Rightarrow v(x,0) = f_1(x) = f(x) - \frac{1}{l}[q(0) - p(0)]x - p(0)$$

همچنین :

$$u_t(x,0) = v_t(x,0) + \frac{1}{l}[\dot{q}(0) - \dot{p}(0)]x + \dot{p}(0) = g(x)$$

$$\Rightarrow v_t(x,0) = g(x) - \frac{1}{l}[\dot{q}(0) - \dot{p}(0)]x - \dot{p}(0) = g_1(x)$$

بنابراین به مساله زیر برای v(t) میرسیم :

$$(1)\quad v_{tt} - c^2 v_{xx} = F_1(x,t) \qquad 0 < x < l \quad , \quad t > 0$$

$$\begin{cases} v(x,0) = f_1(x) & 0 < x < l \\ v_t(x,0) = g_1(x) & 0 < x < l \end{cases} \qquad \begin{cases} v(0,t) = 0 & t \geq 0 \\ v(l,t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

اگر $F_1(x,t)=0$ باشد، که مانند قبل مساله حل می شود. اما اگر $F_1(x,t)$ مخالف صفر باشد، جواب بصورت زیر است :

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin(\frac{n\pi}{l} x)$$

طبق مطالب گذشته داریم ؛

$$F_1(x,t) = 0 \Rightarrow G_n(t) = a_n \cos(\lambda_n t) + b_n \sin(\lambda_n t)$$

در معادله اصلی (۱) داریم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{G}_n + \lambda_n{}^2 G_n) \sin(\frac{n\pi}{l} x) = F_1(x,l) \quad : \quad \lambda_n = c\frac{n\pi}{l}$$

ضرایب سینوسی سری فوریه

$$\Rightarrow \ddot{G}_n = +\lambda_n{}^2 G_n = \frac{2}{l}\int_0^l F_1(x,t) \sin(\frac{n\pi}{l} x) dx \qquad (2)$$

و با حل آن به جواب عمومی زیر می رسیم :

$$G_n(t) = a_n \cos(\lambda_n t) + b_n \sin(\lambda_n t) + G_n^{\ *}(t)$$

که در آن $G_n^*(t)$ جواب خصوصی رابطه (۲) می باشد، بنابراین :

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(\lambda_n t) + b_n \sin(\lambda_n t) + G_n^{\ *}(t)]\sin(\frac{n\pi}{l}x)$$

$$V(x,0) = f_1(x) \quad \Rightarrow \quad a_n = -G_n^{\ *}(0) + \frac{2}{l}\int_0^l f_1(x)\sin(\frac{n\pi}{l}x)dx$$

$$V_t(x,0) = g_1(x) \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{1}{\lambda_n}[-\dot{G}_n^{\ *}(0) + \frac{2}{l}\int_0^l g_1(x)\sin(\frac{n\pi}{l}x)dx]$$

مثال) مطلوبست حل مساله زیر

$$u_{tt} - u_{xx} = t \qquad 0 < x < 1 \quad , \quad t > 0$$

$$\begin{cases} u(x,0) = x & 0 \le x \le 1 \\ u_t(x,0) = 2 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(0,t) = 2t & t \ge 0 \\ u(1,t) = t & t \ge 0 \end{cases}$$

حل

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

$$w(x,t) = ax + b \Rightarrow \begin{cases} b = 2t \\ a = \dfrac{(t-2t)}{1} = -t \end{cases}$$

$$w(x,t) = -tx + 2t$$

$$u(x,t) = v(x,t) - tx + 2t$$

$$v(x,0) = u(x,0) = x$$

$$v_t(x,0) = u_t(x,0) + x - 2 = 2 + x - 2 = x$$

$$v_{xx} = u_{xx} \quad , \quad u_{tt} = v_{tt}$$

بنابراین مساله v بصورت زیر در می آید :

$$v_{tt} = v_{xx} = t \quad , \quad v(x,0) = x \quad , \quad v_t(x,0) = x \quad , \quad v(0,t) = 0 \quad , \quad v(1,t) = 0$$

برای حل مساله به جستجوی جوابی بصورت زیر می پردازیم :

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin(n\pi\, x)$$

و با قرار دادن آن در معادله می یابیم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{G}_n + n^2\pi^2 G_n) \sin(n\pi\, x) = t$$

$$\ddot{G}_n + n^2\pi^2 G_n = 2t\int_0^1 \sin(n\pi x)dx = \frac{-2t}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_0^1 = \frac{2t}{n\pi}[1+(-1)^{n+1}]$$

و

$$G_n = a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t) + \frac{2t}{n^3\pi^3}[1+(-1)^{n+1}]$$

بنابراین ؛

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t) + \frac{2t}{n^3\pi^3}[1+(-1)^{n+1}]\sin(n\pi x)\right]$$

با توجه به این که v(x,0)=x می یابیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x) = x \quad \Rightarrow \quad a_n = 2\int_0^1 x\sin(n\pi x)dx = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

از روی $v_t(x,0)=x$ می یابیم :

$$v_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}[n\pi\, b_n + \frac{2}{n^3\pi^3}(1+(-1)^{n+1}]\sin(n\pi\, x) = x$$

بنابراین :

$$n\pi\, b_n + \frac{2}{n^3\pi^3}[1+(-1)^{n+1}] = 2\int_0^1 x\sin(n\pi\, x)dx = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

و یا :

$$b_n = \frac{2}{n^4\pi^4}[(-1)^n - 1] + \frac{2}{n^2\pi^2}(-1)^{n+1}$$

بنابراین :

$$u(x,t) = tx + 2t + \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}\cos(n\pi\, t) +$$

$$[\frac{2}{n^4\pi^4}\big((-1)^n - 1\big) + \frac{2}{n^2\pi^2}(-1)^{n+1}]\sin(n\pi\, t) + \frac{2t}{n^3\pi^3}(1+(-1)^{n+1})\Big\}\sin(n\pi\, x)$$

تمرین(یا کوئیز) :

$$u_{tt} - 25u_{xx} = x + \frac{25}{2}\pi \qquad 0 < x < 1 \ , \ t > 0$$

$$u(x,0) = (\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4})x^2 \qquad 0 \le x \le 1$$

$$u_t(x,0) = 1 + x \qquad 0 \le x \le 1$$

$$u_x(0,t) = \frac{\pi}{2} \qquad , \qquad u_x(1,t) = 1$$

حل:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

w(x,t) را طوری باید انتخاب کنیم که $\Leftarrow \quad v_x(0,t) = v_x(1,t) = 0$

$$w = ax^2 + bx \ \Rightarrow \ w_x = 2ax + b$$

$$\left.\begin{array}{l} w_x(0,t) = \frac{\pi}{2} = b \\ w_x(1,t) = 1 = 2a + b \end{array}\right\} \Rightarrow a = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

بنابراین با جایگزینی داریم:

$$u(x,t) = v(x,t) + (\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4})x^2 + \frac{\pi}{2}x$$

$$v_{tt} - 25v_{xx} = 25 + x$$

$$v(x,0) = -\frac{\pi}{2}x \quad , \quad v_t(x,0) = 1 + x$$

$$v_x(0,t) = 0 \qquad v_x(1,t) = 0$$

ابتدا مساله زیر را حل می نماییم :

$$v_{tt} = 25v_{xx} \quad , \quad v_x(0,t) = 0 \quad , \quad v_x(1,t) = 0$$

با تفکیک متغیر v(x,t)=F(x).G(x) ادامه می دهیم؛

چون یکی نسبت به t ودیگری نسبت به x است؛پس k عدد ثابت است.

از رابطه اول داریم

$$\Rightarrow \frac{F'}{F} = \frac{\ddot{G}}{25G} = k$$

برای F شرایط اولیه

$$\Rightarrow \begin{cases} F'' - kF = 0 \\ v_x(0,t) = 0 \Rightarrow F'(0) = 0 \quad , \quad v_x(1,t) = 0 \Rightarrow F'(1) = 0 \end{cases}$$

(1) اگر k=0 باشد :

$$\Rightarrow F = ax + b \Rightarrow F' = a = 0 \Rightarrow F = b$$

یک جواب مساله

(2) اگر $k = p^2$ باشد : غ ق ق

(3) اگر $k=-p^2 \Rightarrow F''+p^2F=0 \qquad F'(0)=0 \qquad F'(1)=0$

جواب عمومی :

$$F(x)=A\cos(px)+B\sin(px)$$
$$F'(x)=-Ap\sin(px)+Bp\cos(px)$$
$$F'(0)=0 \Rightarrow Bp=0 \Rightarrow B=0$$
$$F'(1)=0 \Rightarrow F'(1)=-Ap\sin(p) \xrightarrow{p=n\pi} F_n(x)=A\cos(n\pi\, x)$$

بنابراین :

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} G_n(t)\cos(n\pi\, x)$$

با درج در مساله اصلی :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\ddot{G}_n+25n^2\pi^2G_n)\cos(n\pi\, x)=25+x$$

و از آن جا :

بسط زوج سری فوریه

$$\ddot{G}_n+25n^2\pi^2G_n=2\int_0^1(25+x)\cos(n\pi\, x)dx=2\int_0^1 x\cos(n\pi\, x)dx$$
$$=\frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)-1] \quad , \quad n\neq 0$$

جواب عمومی

$$\Rightarrow G_n(t)=a_n\cos(5\pi\, t)+b_n\sin(5\pi\, t)+\frac{2}{25n^4\pi^4}[(-1)^n-1] \quad , \quad n\neq 0$$

به ازای n=0 داریم :

$$\ddot{G}_n = \int_0^1 (25+x)dx = \frac{51}{2} \quad \Rightarrow \quad G_0 = \frac{51}{2}t^2 + a_0 t + b_0$$

بنابراین :

$$v(x,t) = \frac{51}{2}t^2 + a_0 t + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(5n\pi\, t) + b_n \sin(5n\pi\, t) + \frac{2}{25n^4\pi^4}\left((-1)^n - 1\right)\right]\cos(n\pi\, x)$$

$$v(x,0) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n + \frac{2}{25n^4\pi^4}((-1)^n - 1)]\cos(n\pi\, x) = -\frac{\pi}{2}x$$

$$b_0 = \int_0^1 (-\frac{\pi}{2}x)dx = -\frac{\pi}{4}$$

$$a_n = \frac{2}{25n^4\pi^4}[(-1)^{n+1}+1] - \pi\int_0^1 x\cos(n\pi\, x)dx = \frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^{n+1}+1](\frac{1}{25n^2\pi^2} + \frac{\pi}{2})$$

$$v_t(x,0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 5n\pi\, b_n \cos(n\pi\, x) = 1 + x$$

$$a_0 = \int_0^1 (1+x)dx = \frac{3}{2}$$

$$5n\pi\, b_n = 2\int_0^1 (1+x)\cos(n\pi\, \mathrm{x})dx = \frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^{n+1} - 1]$$

$$b_n = \frac{2}{5n^3\pi^3}[(-1)^n - 1]$$

$$u(x,t) = (\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4})x^2 + \frac{\pi}{2}x + \frac{1}{2}(\frac{51}{t^2} + 3t - \frac{\pi}{2}) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^{n+1} + 1](\frac{1}{25n^2\pi^2} + \frac{\pi}{2})\cos(5n\pi t) +$$

$$\frac{2}{5n^3\pi^3}[(-1)^n - 1]\sin(5n\pi t) + \frac{2}{25n^4\pi^4}[(-1)^n - 1]\Big\}\cos(n\pi x)$$

مسأله گرما در حالت کلی

$$u_t - c^2 u_{xx} = F(x,t) \qquad 0 < x < l$$
$$u(x,0) = f(x) \qquad 0 \le x \le l$$
$$u(0,t) = p(t)$$
$$u(l,t) = q(t)$$

حل

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$
$$w \longrightarrow v(0,t) = v(l,t) = 0$$
$$w(x,t) = ax + b$$

بنابراین :

$$\Rightarrow u(x,t) = v(x,t) + \frac{q(t) - p(t)}{l} x + p(t)$$

که داریم :

$$v_t - c^2 v_{xx} = F_1(x,t) \qquad 0 < x < l$$
$$v(x,0) = f_1(x) \qquad 0 \le x \le l$$
$$v(0,t) = v(l,t) = 0$$

$$F_1(x,t) = F(x,t) - \frac{q(t)-p(t)}{l}x - p(t)$$

$$f_1(x) = f(x) - \frac{q(0)-p(0)}{l}x - p(0)$$

برای تعیین v با توجه به شرایط کرانه ای مانند مساله موج کافی است که به جستجوی جوابی به صورت

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$$

باشیم وسایر موارد، مشابه موج حل می شود.

تکلیف-مثال)

$$u(t)-9u_{xx}=n \qquad 0<x<1 \qquad t>0$$
$$u(x,0)=1-\cos(\pi x) \qquad 0\le x\le 1$$
$$u(0,t)=0 \quad t>0 \quad , \quad u(1,t)=2 \quad t\ge 0$$

حل

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$$
$$v(0,t)=v(1,t)=0 \Rightarrow w(x,t)=2x$$
$$u(x,t)=v(x,t)+2x$$

حال به بررسی مساله برای v می پردازیم :

$$v_t-9v_{xx}=x$$
$$v(x,0)=1-\cos(\pi x)-2x \quad , \quad v(0,t)=0=v(1,t)$$

با جایگزینی داریم :

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)\sin(n\pi x)$$

در معادله مساله فوق داریم :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\dot{G}_n+9n^2\pi^2G_n)\sin(n\pi x)=x$$

$$\dot{G}_n+9n^2\pi^2G_n=2\int_0^1 x\sin(n\pi x)dx$$

ضرایب فرد فوریه

و از آن جا :

$$\dot{G}_n + 9n^2\pi^2 G_n = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1} \quad , \quad n \neq 0$$

که دارای جواب عمومی زیر است :

$$G_n = a_n e^{-9n^2\pi^2 t} + \frac{2}{9n^3\pi^3}(-1)^{n+1}$$

بنابراین :

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n e^{-9n^2\pi^2 t} + \frac{2}{9n^3\pi^3}(-1)^{n+1}\}\sin(\pi x)$$

با توجه به شرط $v(x,0) = 1 - \cos(\pi x) - 2x$ داریم :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + \frac{2}{9n^3\pi^3}(-1)^{n+1})\sin(n\pi x) = 1 - \cos(\pi x) - 2x$$

و از آن جا :

$$a_n = \frac{2}{9n^3\pi^3}(-1)^n + \frac{2}{\pi}[\frac{3(-1)^n}{n} - \frac{1}{n} + \frac{n((-1)^{n+1} - 1)}{n^2 - 1}]$$

برای n=1 جدا می کنیم

$$a_1 = \frac{-2}{9\pi^3} + 2\int_0^1 (1 - \cos(\pi x) - 2x)\sin(\pi x)dx = \frac{-2}{9\pi^3}$$

بنابراین :

$$u(x,t) = 2x - \frac{2}{9\pi^3}e^{-9\pi^2 t} + \frac{2}{9\pi^3}\sin(\pi x) +$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\{\frac{2}{9n}(-1)^n + \frac{2}{\pi}[\frac{3(-1)^n}{n} - \frac{1}{n} + \frac{n[(-1)^{n+1} - 1]}{n^2 - 1}]\ e^{-9n^2\pi^2 t} + \frac{2}{9n^3\pi^3}(-1)^{n+1}\}\sin(n\pi x)$$

تکلیف)

$$u_t - 4u_{xx} = xt \qquad 0 < x < 1$$

$$u(x,0) = \sin(\pi\, x) \qquad 0 \le x \le 1$$

$$u(0,t) = t \qquad u(1,t) = t^2 \qquad t \ge 0$$

حل مساله موج در فضای دو بعدی

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) \qquad 0 < x < a \;,\; 0 < y < b \;,\; t > 0$$

$$u(x,y,0) = f(x,y) \qquad 0 \le x \le a \;,\; 0 \le y \le b$$

$$u_t = (x,y,0) = g(x,y) \qquad 0 \le x \le a \;,\; 0 \le y \le b$$

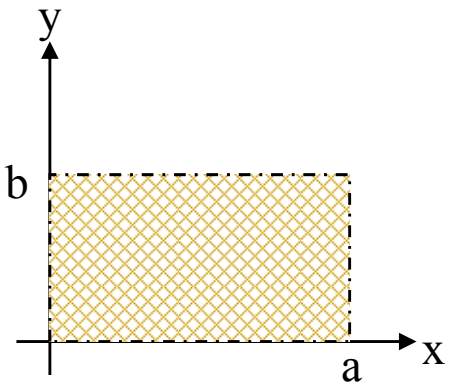
$$u(x,0,t) = 0 \qquad 0 \le x \le a \qquad t \ge 0$$

$$u(x,b,t) = 0 \qquad 0 \le x \le a \qquad t \ge 0$$

$$u(0,y,t) = 0 \qquad 0 \le y \le b \qquad t \ge 0$$

$$u(a,y,t) = 0 \qquad 0 \le y \le b \qquad t \ge 0$$

مانند غشا مستطیلی با ضلعهای a,b



از روش ضربی $u(x,y,t) = F(x,y)\cdot G(t)$ استفاده می کنیم و در نهایت داریم :

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}[a_{mn}\cos(\lambda_{mn}t)+b_{mn}\sin(\lambda_{mn}t)]\sin(\frac{m\pi\, x}{\mathrm{a}})\sin(\frac{n\pi\, y}{b})$$

$$u(x,y,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{mn}\sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)=f(x,y)$$

$$\lambda_{mn}=c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}$$

بنابراین :

$$a_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)dydx$$

و نیز؛

$$u_t(x,y,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}b_{mn}\lambda_{mn}\sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)=g(x,y)$$

و از آن جا :

$$b_{mn}=\frac{4}{ab\lambda_{mn}}\int_0^a\int_0^b g(x,y)\sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)dydx$$

مثال) مساله موج دو بعدی به ازای $a = b = \pi$, $c=1$ و سرعت اولیه صفر و ارتعاش اولیه $f(x,y) = xy\sin(x)\sin(y)$

$$g(x,y) = 0 \Rightarrow b_{mn} = 0$$

$$a_{mn} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f\,\sin(mx)\sin(ny)dxdy =$$

$$\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi} x\sin(x)\sin(mx)dx\ \int_0^{\pi} y\sin(y)\sin(ny)dy$$

$$\int_0^{\pi} x\sin(x)\sin(mx)dx = \begin{cases} \dfrac{2m[(-1)^{m+1}-1]}{[m^2-1]^2} & ;\ m \neq 1 \\ \dfrac{\pi^2}{4} & ;\ m = 1 \end{cases}$$

می یابیم :

$$a_{mn} = \begin{cases} \dfrac{16}{\pi^2}\dfrac{mn[(-1)^{m+1}-1][(-1)^{n+1}-1]}{[m^2-1]^2\ [n^2-1]^2} & ; m \neq 1\ ,\ n \neq 1 \\ \dfrac{\pi m[(-1)^{m+1}-1]}{[m^2-1]} & ; m \neq 1\ ,\ n = 1\ ,\ \lambda_{mn} = \sqrt{(m^2+n^2)} \\ \dfrac{\pi n[(-1)^{m+1}-1]}{[n^2-1]} & ; m = 1, n \neq 1 \\ \dfrac{\pi^2}{4} & ; m = 1, n = 1 \end{cases}$$

معادلات لاپلاس و پواسن

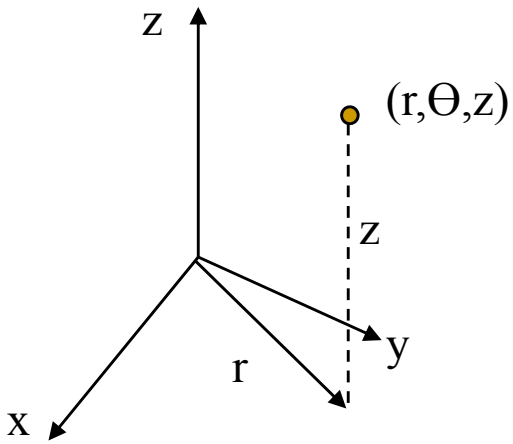
معادله لاپلاس

یکی از مهمترین معادلات با مشتق جزیی در فیزیک معادله لاپلاس می باشد :

(۱) در مختصات دکارتی

$$\nabla^2 u = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 & \longrightarrow \text{سه بعدی} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \longrightarrow \text{دو بعدی} \end{cases}$$

(۲) در مختصات استوانه ای



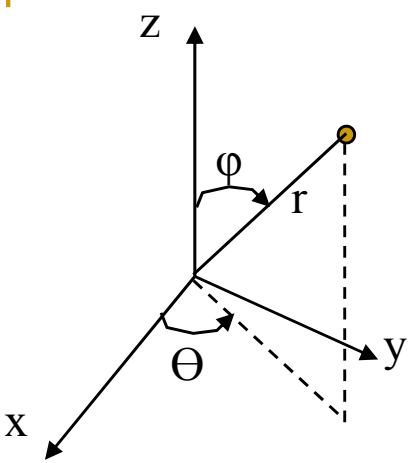
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \mathrm{Arc}\tan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z = z$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

(۳) در مختصات کروی



$$\begin{cases} x = r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = r\cos(\varphi) \end{cases}$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos(\varphi)\partial u}{r^2 \partial \varphi} + \frac{1}{r^2 \sin^2(\varphi)}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

در حل مسائل مربوط لاپلاس باید دقت نمود کدامیک از مختصات ها مفید می باشد و سپس مساله را حل نمود.

نکته) نیروهای جاذبه و دافعه بین بارهای الکتریکی و اجسام که به ترتیب از قوانین کولن ونیوتن پیروی می کنند، دارای تابع پتانسل هستند و آن تابع پتانسیل خود نیز جواب معادله لاپلاس می باشد .

مثال ۱) پتانسیل میدان بین دو صفحه هادی موازی که عمود بر محور x در نقاطی با طول های ۵-و۵ هستند را بیابید ، در صورتی که اختلاف پتانسیل موجود روی این صفحات به ترتیب ۱۲۰و۱۱۰ ولت باشند .

حل

با توجه به این که پتانسیل فقط به محور xها وابسته می شود، آن گاه معادله لاپلاس بصور $u_{xx}=0$ در می آید که آن گاه داریم :

$$\left.\begin{array}{l} u(x)=ax+b \\ u(5)=220 \quad \text{volt} \\ u(-5)=110 \text{ volt} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=11 \\ b=165 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad u(x)=11x+165$$

مثال ۲) پتانسیل موجود بین دو استوانه هم محور به شعاع ۱۰و۵ را بیابید، در صورتی که اختلاف پتانسیل های موجود بر این استوانه ها به ترتیب ۲۲۰و۱۱۰ ولت باشند .

حل

با استفاده از مختصات استوانه ای ، معادله لاپلاس به صورت $u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+u_{zz}=0$ می باشد. که چون اشکال به صورت استوانه ای هستند، تغییر پتانسیل در اثر تغییر شعاع r می باشد؛ پس داریم :

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r=0 \quad , \quad u(5)=110 \quad , \quad u(10)=220$$

$$\xrightarrow{\frac{du}{dr}=v=u_r} \nabla^2 u = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} = \frac{dv}{dr} + \frac{1}{r}v = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dr} = -\frac{1}{r}v$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{v} + \frac{1}{r}dr = 0 \Rightarrow \ln(v) + \ln(r) = \ln(c)$$

$$\Rightarrow v_r = c \Rightarrow v = \frac{c}{r} \Rightarrow \frac{dv}{dr} = \frac{c}{r} \Rightarrow u = c\ln(r) + k$$

$$\Rightarrow u = \frac{110}{\ln(2)}\ln(r) + 110(1 - \frac{\ln(5)}{\ln(2)})$$

مثال ۳) چنانچه توزیع حرارت در فضای بین دو کره به شعاع های ۵و۱۰ در حالت پایا (ماندگار) بوده و کره ها به ترتیب در درجه حرارت ثابت ۱۰و۵ باشد، تابع درجه حرارت را در داخل دو کره بیابید .

حل

تغییرات دما نسبت به Θو ρ صفر است.(مشتقات آن ها حذف می شود)

$$\frac{d}{dr}(r^2\frac{du}{dr}) = 0$$

$$r^2\frac{du}{dr} = a \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u = \frac{-a}{r} + b \\ u(10) = 5 \\ u(5) = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow u = \frac{50}{r}$$

معادلات پواسن

$$\nabla^2 u = f(x,y,z)$$

مثال) مطلوبست حل معادله زیر :

$$u_{xx} + u_{yy} = x + 2y \qquad 0 < x < \pi \qquad 0 < y < \pi$$

$$u(x,0) = x \qquad 0 \le x \le \pi \quad , \quad u(x,\pi) = 2 \qquad 0 \le x \le \pi$$

$$u(0,y) = y \qquad 0 \le y \le \pi \quad , \quad u(\pi,y) = \cos(y) \quad 0 \le y \le \pi$$

حل

قرار می دهیم $u(x,y) = v(x,y) + w(x,y)$ و w را چنان می یابیم که $v(x,\pi) = v(x,0) = 0$ (در یک جهت شرایط کرانه ای را صفر می کنیم (y)) بنابراین : $w(x,y) = ay + b$ و با توجه به شرایط مساله :

$$\begin{cases} b = x \\ a = \dfrac{2-x}{\pi} \end{cases} \Rightarrow u(x,y) = v(x,y) + \frac{2-x}{\pi} y + x$$

با توجه به این که $u(0,y) = y \quad , \quad \cos(y) = u(\pi,y)$ بنابراین :

$$v(\pi,y) = \cos(y) - \frac{2-\pi}{\pi} y - \pi \quad , \quad v(0,y) = (1 - \frac{2}{\pi}) y$$

بنابراین مساله را برای v داریم :

$$u_{xx}+v_{yy}=x+2y \quad , \quad v(x,0)=v(x,\pi)=0$$

$$v(0,y)=(1-\frac{2}{\pi})y, v(\pi,y)=\cos(y)-\frac{2-\pi}{\pi}y-\pi$$

با فرض $v(x,y)=F(x)\cdot G(y)$ و درج آن در معادله $v_{xx}+v_{yy}=0$ می یابیم :

$$\frac{F''}{F}=-\frac{G''}{G}=k$$

بنابراین به دو معادله دیفرانسیل زیر می رسیم :

بر حسب y

$$G''+kG=0 \quad , \quad F''-kF=0$$

بر حسب x

با توجه به شرایط اول و دوم مساله، $G(0)=0 \quad , \quad G(\pi)=0$ و از آن جا مانند قبل داریم :

$$G_n(y)=\sin(xy) \quad , \quad k=n^2$$

عدد مثبت

حال به حل مساله مربوط به v بصورت $v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(x)\sin(xy)$ می پردازیم .

با درج آن در مساله داریم :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(F_n''-n^2F_n)\sin(xy)=x+2y \quad\Rightarrow\quad F_n''-n^2F_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+2y)\sin(xy)dy=a_n\pi+b_n$$

که در آن :

$$a_n=\frac{-2}{n\pi}[(-1)^n-1]$$

$$b_n=\frac{4}{-n}(-1)^{n+1}$$

و جواب عمومی عبارتست از :

$$F_n(x)=\underbrace{\frac{-a_n}{n^2}x-\frac{b_n}{n^2}}_{\text{جواب خصوصی}}+A_ne^{nx}+B_ne^{-nx} \qquad [s^2-n^2=0\Rightarrow s^2=k=n^2\Rightarrow s=\pm n]$$

و از آن جا :

$$v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{a_n}{n^2}x-\frac{b_n}{n^2}+\overbrace{A_ne^{nx}+B_ne^{-nx}}^{\text{جواب عمومی مربوط به F}})\sin(ny)$$

این قسمت عمومی را می توان بصورت هایپربولیک نمایش داد :

$$\cosh(z)=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z}) \quad , \quad \sinh(z)=\frac{1}{2}(e^z-e^{-z})$$

$$F(x)=\underbrace{M\cosh(nx)+N\sinh(nx)}_{\text{جواب عمومی}}$$

با توجه به شرایط سوم و چهارم مربوط به مساله v به ترتیب می یابیم:

$$v(0,y)=\sum_{n=1}^{\infty}[-\frac{b_n}{n^2}+A_n+B_n]\sin(ny)=(1-\frac{2}{\pi})y$$

$$v(\pi,y)=\sum_{n=1}^{\infty}[-\frac{b_n}{n^2}-\frac{a_n}{n^2}\pi+A_ne^{n\pi}+B_ne^{-n\pi}]\sin(ny)=\cos(y)-\frac{2-\pi}{\pi}y-\pi$$

و از آن جا :

$$v(0,y)\longrightarrow A_n+B_n=\frac{b_n}{n^2}+\frac{2}{\pi}(1-\frac{2}{\pi})\int_0^{\pi}y\sin(ny)dy$$

$$v(\pi,y)\longrightarrow A_ne^{n\pi}+B_ne^{-n\pi}=\frac{b^n}{n^2}+\frac{a_n}{n^2}\pi+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos(y)-\frac{2-\pi}{\pi}y-\pi)\sin(ny)dy$$

با حل دو معادله دو مجهول مساله حل می شود :

$$u(x,y)=v(x,y)+w(x,y)$$

توابع مختلط

$$z = x + iy \Rightarrow \begin{cases} x = R_e[z] & \text{قسمت حقیقی} \\ y = I_m[z] & \text{قسمت موهومی} \end{cases}$$

$$z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z = \pm 2i \qquad i^2 = 1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$$

(1) جمع :	$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$
(2) ضرب :	$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$
(3) تقسیم :	$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}} + i\dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}} \quad , \quad z_2 \neq 0$

به عنوان مثال :

$$\begin{cases} z_1 = 2 - 3i \\ z_2 = -5 + i \end{cases} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

خواص اعمال حسابی

(1) قوانین جابجایی :	$\begin{cases} z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \\ z_1 z_2 = z_2 z_1 \end{cases}$
(2) قوانین انجمنی:	$\begin{cases} (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \\ (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) \end{cases}$
(3) قوانین بخش پذیری:	$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ $0 + z = z + 0 = 0 \qquad z + (-z) = 0 \qquad z \times 1 = z$

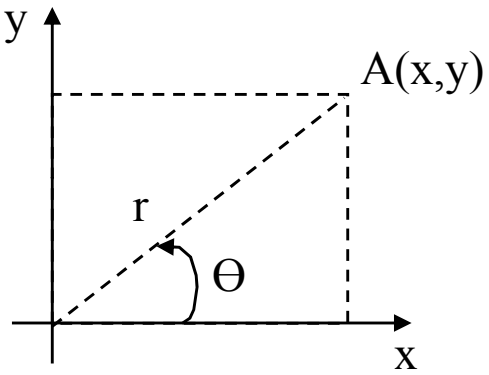
اعداد مختلط مزدوج

$$z = x + iy \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = x - iy$$

$$z + \bar{z} = 2x \quad , \quad z - \bar{z} = 2iy$$

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad , \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

شکل قطبی اعداد مختلط



$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

$$r = |z|^n = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \underset{\text{آرگومان}}{\theta} = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

فرمول اویلر

$$z = r\cos(\theta) + ri\sin(\theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad , \quad z = re^{i\theta}$$

$$e^{i\theta} \qquad \Rightarrow T = 2k\pi i$$

$$e^{i\theta + (2k\pi i)} = e^{i\theta} \longrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad , \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

خواص

$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

فرمول موآور

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

اثبات :

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

نواحی در صفحه مختلط

ϵ همسایگی نقطه z_0 مجموعه نقاطی از صفحه مختلط است که در نامساوی $|z - z_0| < \varepsilon$ صدق کند .

$$N \in (z_0) = \{z | z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < \varepsilon\}$$

فرض کنید D زیر مجموعه ای از صفحه مختلط باشد ، نقطه $z_0 \in D$ را یک نقطه داخلی D نامند هرگاه یک همسایگی از z_0 وجود داشته باشد که $N \in (z_0) \subset D$

$N \in (z_0)$

و نیز نقطه z_0 را یک نقطه خارجی D نامند هر گاه یک همسایگی مانند $N \in (z_0)$ موجود باشد که :

$$N \in (z_0) \bigcap D = \phi$$

نقطه z_0 را یک نقطه کرانه ای D نامند هرگاه به ازای هر همسایگی $N \in (z_0)$

$$\begin{cases} N \in (z_0) \bigcap (\mathbb{C} - D) \neq \phi \\ N \in (z_0) \bigcap D \neq \phi \end{cases}$$

مجموعه D را یک مجموعه **باز** گویند هرگاه؛ تمام نقاط آن نقاط داخلی باشند.

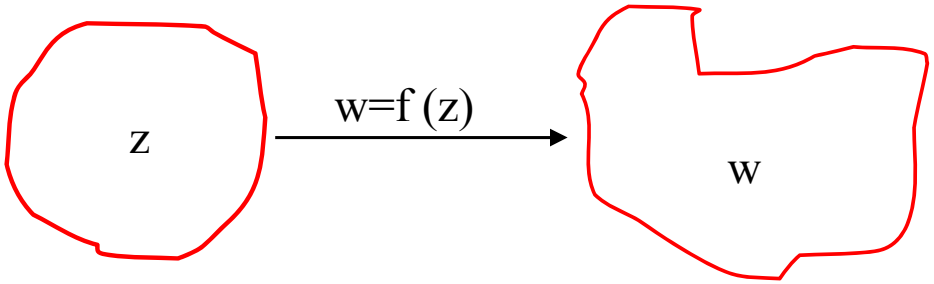
یک مجموعه را **بسته** گویند هرگاه شامل نقاط مرزی خود نیز باشد.

مجموعه D را **ساده** گویند هرگاه منحنی مرز آن خود را قطع نکند.

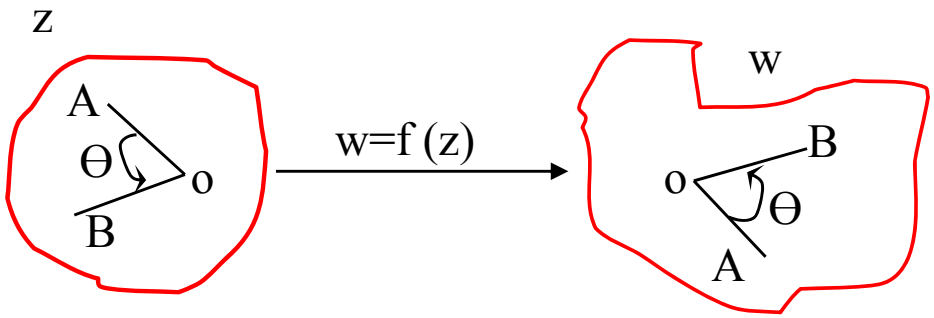
مجموعه D را **همبند** گویند هرگاه؛ بتوان هر دو نقطه از آن را با یک خط شکسته طوری به یکدیگر وصل نمود که کلیه این نقاط شکسته داخل D باشد .

توابع مختلط

توسط تابعی مانند $w=f(z)$ می توان ناحیه ای از صفحه z را به داخل ناحیه ای در صفحه w منتقل نمود که در اینصورت به تابع $w=f(z)$ یک نگاشت یا یک تبدیل می گویند .



نگاشتی که زاویه را چه از نظر اندازه و چه از نظر جهت بدون تغییر منتقل کندبه **نگاشت همدیس** موجود است .



اندازه زاویه ها برابر و جهت در هر دو از A به B است.

حد تابع مختلط

$w = f(z)$ در نقطه z_0 دارای حد

$$\lim_{z \to z_0} f(Z) = w_0$$

هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 \ , \ |z - z_0| < \delta \ \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

تابع $f(z)$ را در نقطه z_0 پیوسته گویند هر گاه این تابع در z_0 دارای حدی برابر مقدار تابع در این نقطه باشد، یعنی :

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

هر گاه $f(z)$ و $g(z)$ در z_0 دارای حد باشند، آن گاه :

$$\lim_{z \to z_0} (f(z) \pm g(z)) = \lim_{z \to z_0} f(z) \pm \lim_{z \to z_0} g(z)$$

$$\lim_{z \to z_0} (f(z) \cdot g(z)) = \lim_{z \to z_0} f(z) \cdot \lim_{z \to z_0} g(z)$$

$$\lim_{z \to z_0} \left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \frac{\lim_{z \to z_0} f(z)}{\lim_{z \to z_0} g(z)} \qquad , \qquad \lim_{z \to z_0} g(z) \neq 0$$

مشتق یک تابع مختلط

w=f(z) دارای مشتق است اگر $\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ دارای حد باشد یعنی :

$$f'(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

تابع w=f(z) را در نقطه z_0 تحلیلی گویند هرگاه یک همسایگی از z_0 موجود باشد کـه ایـن تابـع در تمام نـقاط ایـن همسایگی دارای مشتق باشد .

تابع w=f(z) را یک تابع تمام نامند هرگاه در کلیه نقاط صفحه z تحلیلی باشد. به عنوان مثال $w=z^2$ یا هر تابع به صورت یک چند جمله ای تابعی تمام است .

در رابطه با مشتق دو قضیه بسیار مهم وجود دارد .

قضیه اول کوشی - ریمان

هرگاه تابع $f(z)=u+iv$ در نقطه $z=x+iy$ دارای مشتق باشد آن گاه :

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{i}(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y})$$

همچنین

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$u_y=-v_x \quad , \quad u_x=v_y$$

این معادلات به شرایط یا معادلات کوشی ریمان موسومند.

اثبات به عنوان تمرین (از طریق مسیرهای مختلف برای $\begin{matrix}\Delta x+\Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0\end{matrix}$)

قضیه دوم کوشی - ریمان

هر گاه u و v در تابع $f(z)=u+iv$ در نقطه $z=x+iy$ در معادلات کشی ریمان صدق کرده ودر یک همسایگی از (x,y) پیوسته و با مشتقات جزئی پیوسته باشد ، آن گاه $f'(z)$ موجود و برابر است با :

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{i}(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y})$$

معادلات کوشی – ریمان در مختصات قطبی

اگر قرار دهیم $x=r\cos\theta \quad , \quad y=r\sin\theta$ آن گاه ؛

$$u_r=\frac{1}{r}v_\theta \quad , \quad v_r=-\frac{1}{r}u_\theta$$

و مشتق تابع در صورت وجود برابر است با :

$$\boxed{f'(z)=(u_r+iv_r)e^{-i\theta}}$$

مثال ۱) مشتق $f(z)=z^2$ را در صورت وجود بیابید .

$$f(z)=u+iv=(x+iy)^2=x^2-y^2+i2xy$$

$$u=x^2-y^2 \quad , \quad v=2xy \quad \Rightarrow \begin{cases} u_y=-v_x=-2y \\ u_x=v_y=2x \end{cases}$$

همه پیوسته و در کوشی ریمان صدق می کنند

$$f'(z)=u_x+iv_x=2x+i2y=2z$$

مثال ۲) مشتق $f(z)=\bar{z}$ را در صورت وجود بیابید .

$$f(z)=\bar{z}=x-iy \Rightarrow \begin{cases} u=x \\ v=-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_x=1 \ , \ u_y=0 \\ v_y=-1 \ , \ v_x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u_x \neq v_y \\ u_y=-v_x=0 \end{matrix} \longrightarrow$$

در هیچ نقطه ای معادلات کوشی ریمان صدق نمی کنند؛ در هیچ نقطه ای مشتقپذیر نیست .

مثال ۳) مشتق $f(z)=|z|^2=x^2+y^2$ را در صورت وجود بیابید .

$$u=x^2+y^2 \ , \ v=0 \ \Rightarrow \begin{cases} u_x=2x \\ v_y=0 \end{cases} , \begin{cases} u_y=2y \\ v_x=0 \end{cases}$$

شرط برقراری شرایط x=y=0 ، بنابراین فقط در نقطه (0,0) مشتقپذیر است .

مثال ۴) $f(z) = (R_e z)^2 + i(I_m z)^2$

$$f(z) = x^2 + iy^2$$

$$u = x^2 \ , \ v = y^2 \ \Rightarrow u_x = 2x \ , v_y = 2y \ , \ v_x = u_y = 0$$

u , v تنها وقتی در کوشی – ریمان صدق می کند که y=x باشد ودر اینصورت

$$f'(x+iy) = 2x$$

قسمت حقیقی و قسمت موهومی تابع مختلط

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ که در حوزه D تحلیلی است جواب های معادله لاپلاس

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad , \quad \nabla^2 v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

در D هستند و مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته در D دارند .

جوابی از معادله لاپلاس را که مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته داشته باشند تابع **همساز** می نامیم . بنابراین قسمت های حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی توابع همسازند .

تعریف) هر گاه دو تابع همساز u(x,y) , v(x,y) در یک حوزه D در معادلات کوشی – ریمان صدق کنند، یعنی هرگاه v , u قسمت های حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی f(z) در D باشند در این صورت v(x,y) را تابع همساز مزدوج u(x,y) در D نامند .

مزدوج یک تابع همساز را می توان از معادلات کوشی – ریمان بدست آورد .

مثال) مزدوج همساز $u = x^2 - y^2$ را بدست آورید .

u در معادله لاپلاس صدق می کند

$$u_{xx} + u_{yy} = 2 - 2 = 0$$

$$v_x = -u_y = 2y \Rightarrow v = 2xy + h(y) \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} u_x = v_y = 2x \\ (1) \Rightarrow v_y = 2x + h'(y) \end{array}\right\} \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow v(x,y) = 2xy$$

ودر نتیجه $f(z) = (x^2 - y^2) + i2xy$ تابعی تحلیلی است .

تمرین) تابع تحلیلی $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ را به دست آورید، وقتی که $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$, $w(0) = 0$ باشد . (صفحه ۱۶ کتاب دکتر نیکوکار)

$$w(z) = \underbrace{x^3 - 3xy^2}_{u} + i(\underbrace{3x^2y - y^3}_{v})$$

توابع مقدماتي

۱ـ تابع نمايي

تابع نمايي به ازاي هر z بصورت زير است :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \Rightarrow \begin{cases} |e^z| = e^x \\ \arg e^z = y \end{cases}$$

تابع e^z به ازاي تمام مقادير z ؛ تحليلي و مخالف صفر است و

$$(e^z)' = e^z$$

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

با توجه به اين كه :

$$e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$$

بنابراين :

$$\Rightarrow e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$$

يعني e^z تابعي متناوب با دوره تناوب $2\pi i$ مي باشد . لذا $f(z) = e^z$ تمام مقادير خود را در نوار $-\pi<y<\pi$ اختيار مي كند، كه به اين نوار نامتناهي، ناحيه بنيادي e^z مي گويند. بعضي از خواص آن عبارتند از :

$$e^0 = 1 \quad , \quad e^{z_1} \div e^{z_2} = e^{z_1 - z_2} \quad , \quad (e^z)^n = e^{nz}$$

توجه) دامنه تابع نمايي ، كل صفحه مختلط و برد تابع تمام صفحه مختلط به استثناي مبدأ مي باشد.

مثال) اگر z يك عدد مختلط باشد ، مدول و آرگومان عدد e^{z+i} كدام است؟

$$e^{z+i} = e^{x+i(y+1)} = e^{x}e^{i(y+1)} \longrightarrow \begin{cases} \left|e^{z+i}\right| = e^{x} \\ \arg e^{z+i} = y+1 \end{cases}$$

توجه) به ازاي هر z، $\overline{e^{z}} = e^{\bar{z}}$ و نيز $e^{\bar{z}}$ هيچ جا تحليلي نمي باشد .

۲ـ توابع مثلثاتي و هذلولوي

توابع $\sin z$, $\cos z$ را بصورت زير تعريف مي كنيم.

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

$$\cos z = \frac{1}{2i}(e^{iz} + e^{-iz})$$

اين دو تابع متناوب با دوره تناوب 2π مي باشند. همچنين توابع زير را نيز داريم :

$$(\frac{1}{\cos z})\sec z \quad , \quad (\frac{1}{\sin z})\csc z \quad , \quad \tan z \quad , \quad \cot z$$

به دليل اين كه e^z تحليلي است توابع $\sin z$, $\cos z$ تحليلي هستند (به ازاي تمام مقادير). همچنين $\tan z$, $\sec z$ بجز در نقاطي كه $\cos z$ مساوي صفر است تحليلي هستند. و توابع $\cot z$, $\csc z$ بجز در نقاطي كه $\sin z = 0$ است تحليلي هستند.

توابع $\cos z$, $\sec z$ زوج و بقيه فرد مي باشد.

توجه) تمام فرمول هاي توابع مثلثاتي حقيقي براي مقادير مختلط نيز برقرارند .

$$(\cos z)' = -\sin z$$
$$(\sin z)' = \cos z$$
$$(\tan z)' = \sec^2 z$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$
$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$$

سينوس و كسينوس هذلولوي متغيرz :

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \quad , \quad \cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$$

توابع فوق به ازاي كليه مقادير z تحليلي مي باشند و دوره تناوب هر دو برابر $2\pi i$ مي باشد و دامنه و برد آن ها تمام صفحه اعداد مختلط است.

با توجه به فرمول هاي داده شده داريم :

$$\cosh z = \cos(iz) \quad , \quad \sinh z = -i\sin(iz)$$
$$\cosh(iz) = \cos(z) \quad , \quad \sinh(iz) = i\sin(z)$$

به راحتي مي توان بدست آورد كه :

$$(\sinh z)' = \cosh z \quad , \quad (\cosh z)' = \sinh z$$

$$(\tanh z)' = \operatorname{sech} z \quad , \quad (\coth z)' = -\operatorname{csch}^2 z$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

$$\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$$

$$\sinh(-z) = -\sinh z, \cosh(-z) = \cosh z$$

$$(\tan z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \quad , \quad \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \cdots)$$

توجه) $\tanh z$ تابعي متناوب با دوره تناوب πi مي باشد.

٣- توابع لگاريتمي

۴- توابع معکوس مثلثاتي

معکوس سینوس $w=\sin^{-1} z$ تابعی است که در رابطه $\sin w = z$ صدق می کند.

معکوس کسینوس $w=\cos^{-1} z$ تابعی است که در رابطه $\cos w = z$ صدق می کند.

سایر معکوس های توابع مثلثاتی و هذلولوی به طریق مشابه تعریف می شوند.

معکوس تابع هذلولوی و مثلثاتی را می توان بر حسب تابع لگاریتم بیان نمود.

$$\sin^{-1} z = -i\ln(iz+\sqrt{1-z^2})$$

$$\cos^{-1} z = -i\ln(z+i\sqrt{1-z^2})$$

$$\tan^{-1} z = \frac{i}{2}\ln(\frac{i+z}{i-z})$$

$$\sinh^{-1} z = \ln(z+\sqrt{z^2+1}) \quad , \quad \cosh^{-1} z = \ln(z+\sqrt{z^2-1})$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+z}{1-z})$$

همچنین داریم :

$$\frac{d}{dz}\sin^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\frac{d}{dz}\cos^{-1} z = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\frac{d}{dz}\tan^{-1} z = \frac{1}{1+z^2}$$

۵- توابع توانی $w = z^c$

$w = z^c = e^{c\ln z}$ بنابراین به علت چند مقداری بودن $\ln z$ دیگر به صورت تابع نیست، برای همین تعریف می کنیم :

$$w = e^{c\ln z}$$

به عنوان مثال :

$$i^i = e^{i\ln i} = e^{i(\frac{\pi}{2}i \pm 2\pi\, in)} = e^{-\frac{\pi}{2} \mp 2\pi\, n}$$

مقدار اصلی $e^{-\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e^{\pi}}}$

با توجه به فرمول $z^c = e^{c\ln z}$ ، برای هر عدد مختلط a می توان نوشت:

$$a^z = e^{z\ln a}$$

به سادگی می توان نشان داد:

$$\frac{d}{dz} z^c = cz^{c-1} \qquad (|z| > 0) \quad , \quad \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi$$

$$\frac{d}{dz} a^z = a^z \ln a \qquad a \neq 0$$

۶- توابع $w=\sqrt[n]{z}$

هرگاه $z=re^{i\theta}$, $-\pi<\theta\le\pi$ باشد، آن گاه:

$$w=\sqrt[n]{r}\ e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{n})} \qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

جواب های قابل قبول برابر n عدد می باشد که با یکدیگر متفاوت هستند. به عنوان مثال :

$$w=(i+1)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow z=\sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow w=\sqrt[8]{2}\ e^{i(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4})}$$

$$w=\begin{cases}\sqrt[8]{2}\ e^{i\frac{\pi}{16}} & k=0\\ \sqrt[8]{2}\ e^{i\frac{9\pi}{16}} & k=1\\ \sqrt[8]{2}\ e^{i\frac{-7\pi}{16}} & k=-1\\ \sqrt[8]{2}\ e^{i\frac{-15\pi}{16}} & k=-2\end{cases}$$

۷- توابع $w = z^n$

در این مورد جواب یکتا است، فقط در صورت نیاز باید اصلاحی در آن صورت گیرد تا $-\pi < \varphi < \pi$ باشد.

برخی توابع مقدماتی ، نگاشت های همدیس

۱ـ تابع همانی

$f(z) = z \longrightarrow$ این تابع تام و همدیس می باشد.

۲ـ تابع $w = z + b$

تابعی است تام که هر شکل را بدون تغییر به اندازه b منتقل می کند.(b می تواند عدد مختلط باشد)

۳ـ توابع خطی $w = az + b$ (a,b می تواند عدد مختلط و ثابت باشد)

مثال)

$$w = iz + 1 + i = (-y + 1) + i(x + 1)$$

حال اگر رابطه بین x,y در صفحه z به صورت یک سهمی باشد، یعنی $y = x^2$ آنگاه در صفحه w رابطه بین u ,v چنین می شود :

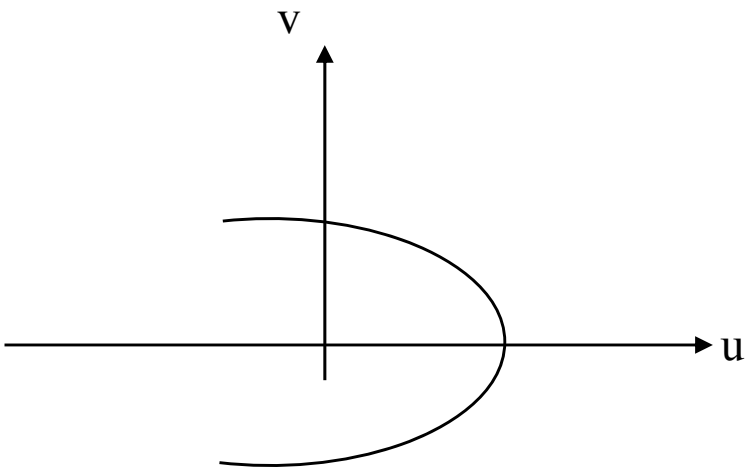
$$\begin{cases} u = -y + 1 = -x^2 + 1 \\ v = x + 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{حذف x}} u - 1 = -(v - 1)^2$$

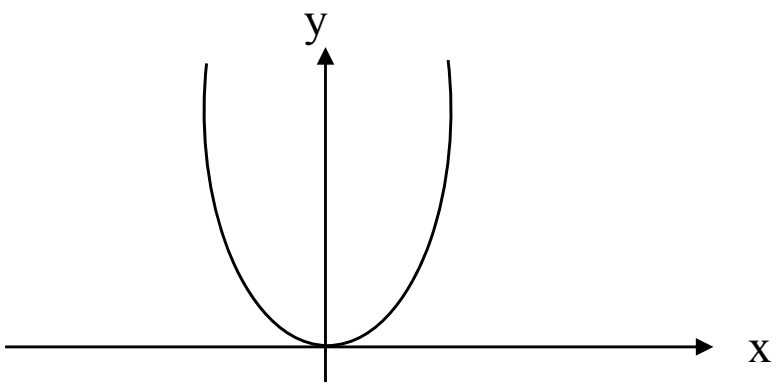
تبدیل منحنی ها یا نواحی از یک صفحه به صفحه دیگر به روش هندسی نیز امکان پذیر است.

مثلا

$$\begin{cases} w = az \Rightarrow w = rr_0 e^{i(\theta+\theta_0)} = \rho e^{i\varphi} \\ w = \rho\, e^{i\varphi} \\ z = re^{i\theta} \\ a = r_0 e^{i\theta_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \theta + \theta_0 \\ \rho = rr_0 \end{cases}$$

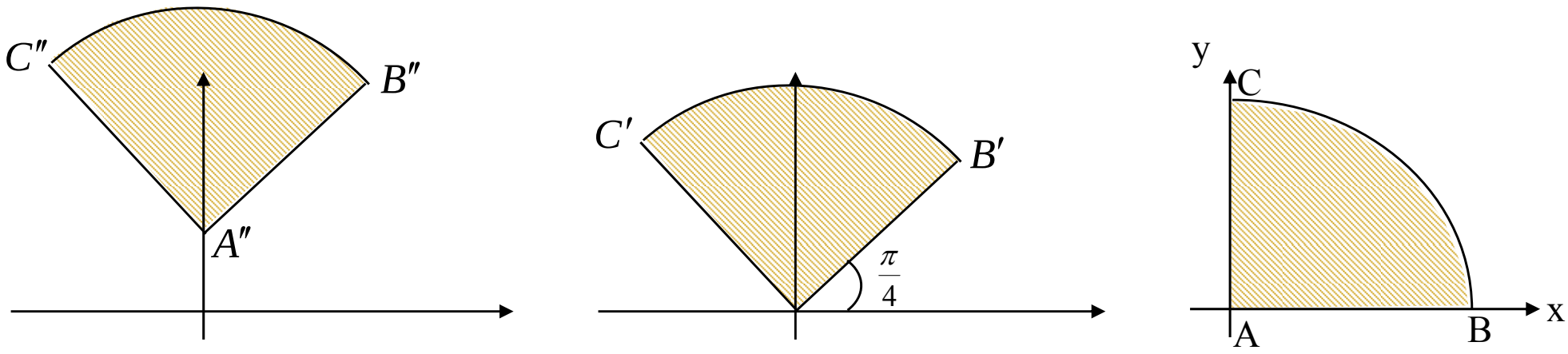
یعنی برای رسیدن از z به w در تبدیل w =az+b ابتدا انبساط یا انقباض به اندازه $|a|$ و دورانی به اندازه arg(a) و انتقالی به اندازه b می دهیم. مشاهده می شود که هیچگاه اندازه و یا جهت زاویه تغییر نمی کند.





قضیه) هرگاه $w = f(z) = u + iv$ در نقطه z تحلیلی بوده و $f'(z) \neq 0$ باشد آنگاه $w = f(z)$ در z تابعی همدیس است. یعنی هر زاویه با راس z را بدون آنکه اندازه و جهت آن را عوض کند به صفحه w منتقل می کند.

مثال) شکل زیر $w = (1+i)z + 2i$ را نشان می دهد که متشکل از دورانی به اندازه $\frac{\pi}{4}$ در جهت مثلثاتی و انبساطی به اندازه $|1+i| = \sqrt{2}$ و انتقالی قائم به اندازه ۲ به طرف بالا می باشد.



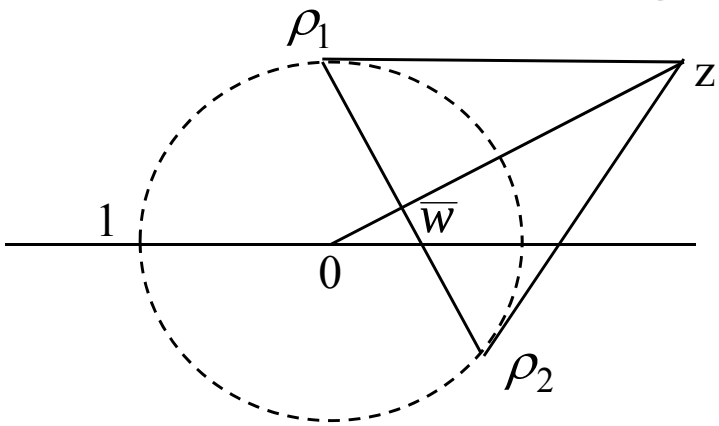
$w = u + iv$ $\qquad$ $w_1 = u_1 + iv_1$ $\qquad$ $z = x + iy$

۴- تابع $w = \dfrac{1}{z}$

نگاشت $w = \dfrac{1}{z}$ تناظر یک به یک بین نقاط مخالف صفر , w, z برقرار می کند.

$$\left.\begin{aligned} z &= re^{i\theta} \\ w &= \rho e^{i\varphi} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \dfrac{1}{r} \\ \varphi = -\theta \end{cases} \qquad \overline{w} = \rho e^{-i\varphi}$$

بنابراین $\overline{w}, z \neq 0$ بر روی شعاعی که مبدا را به z وصل می کند قرار می گیرند.

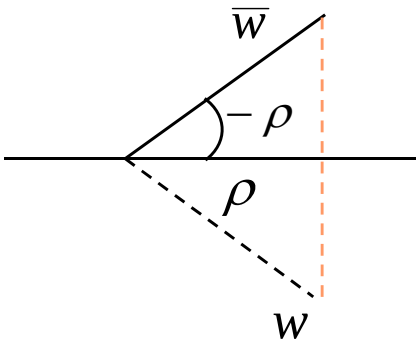


دایره R=1 را در نظر بگیرید

$$|\overline{w}| = \frac{1}{|z|}$$

محل برخورد $\rho_1\rho_2$ و oz همان نقطه $\overline{w}$ می باشد. سپس باید برای به دست آوردن w ، مزدوج $\overline{w}$ را به دست آوریم.

این نگاشت نقاط خارج دایره $|z|=1$ را به روی نقاط ناصفر داخل دایره واحد و نیم دایره بالایی $|z|=1$ را به نیم دایره پائینی تبدیل می کند.



$w=\dfrac{1}{z}$ هر خط راست یا دایره را به روی یک دایره یا خط راست می نگارد.

معادله کلی دایره یا خط راست در صفحه z را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\boxed{A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0}$$

اگر $A=0$ باشد معادله فوق یک خط راست است و اگر $A\neq 0$ باشد، نمایش دایره می باشد.

تصویر آن در صفحه $w=u+iv$ نیز با تبدیل $w=\dfrac{1}{z}$ بصورت زیر است :

$$\boxed{A+Bu-Cv+D(u^2+v^2)=0}$$

که حالت های زیر بوجود می آید :

الف) اگر $A\neq 0$ و $D\neq 0$ ، یعنی دایره از مبدا مختصات عبور نکند ، تبدیل $w=\dfrac{1}{z}$ دایره را به دایره ای که از مبدا نمی گذرد تبدیل می کند .

ب) اگر $A\neq 0$ و $D=0$ ، (دایره از مبدا عبور کند) ⟵ خط راستی که از مبدا نمی گذرد.

ج) اگر $A=0$ و $D\neq 0$ ، (خط راست که از مبدا نگذرد) ⟵ دایره ای که از مبدا می گذرد.

د) اگر $A=0$ و $D=0$ ، (خط راست که از مبدا می گذرد) ⟵ خط راست که از مبدا می گذرد

٥- تبديل $w = z^2$

۶- تبدیل $w = e^z$

نگاشتی را تعریف می کند که همه جا همدیسی است، زیرا :

$$w \neq 0$$

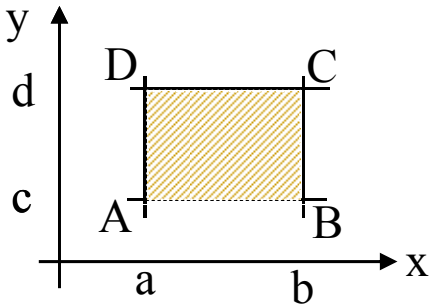
$$\begin{matrix} z = x + iy \\ w = \rho\, e^{i\varphi} \end{matrix} \Rightarrow w = e^x e^{iy} \Rightarrow \begin{cases} \rho = e^x \\ \varphi = y \end{cases}$$

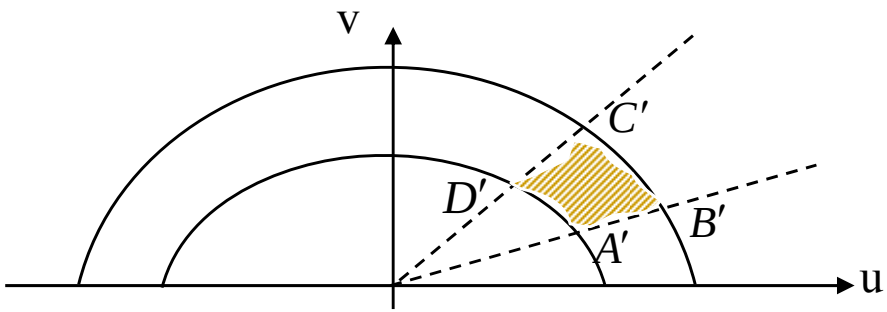
بنابراین اگر $x = a = etc$ ⟸ نگاشت آن دایره ای به شعاع $\rho = e^a$ می باشد.

اگر $y = b = cte$ ⟸ خط $\varphi = b$

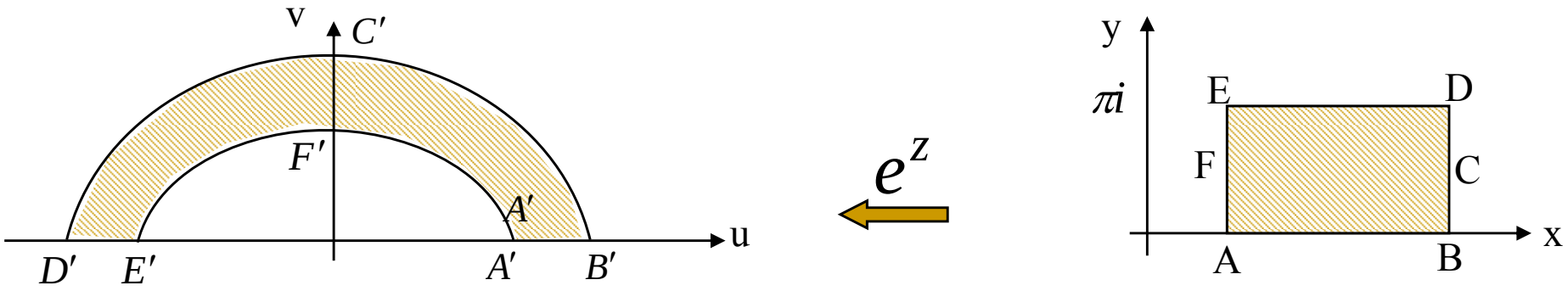
ناحیه مستطیلی $a \le x \le b \;,\; c \le y \le d$ بر روی ناحیه

$$e^a \le \rho \le e^b \;,\; c \le \varphi \le d$$





مثال)

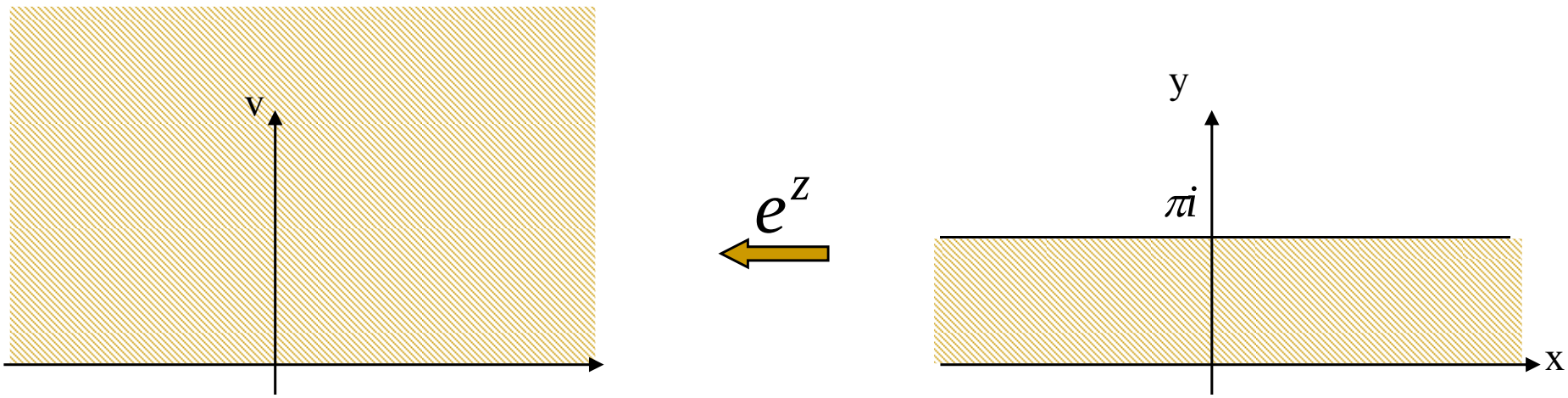


روی یک دایره A', F', E'

روی یک دایره B', C', D'

$$\begin{cases} A', B' & \text{هم فاز} \\ E', D' & \text{هم فاز} \\ C', F' & \text{هم فاز} \end{cases}$$

نوار نامتناهی $0 < y < \pi i$



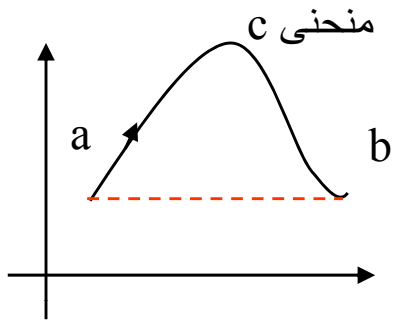
$0 < \rho < \infty$

$0 < \varphi < \pi$

انتگرال گیری از توابع مختلط

در توابع مختلط تنها به تعریف انتگرال روی منحنی می پردازیم، برای این منظور منحنی c و معادله زیر در نظر گرفته می شود :

$$z(t) = x(t) + iy(t) \qquad a \le t \le b$$

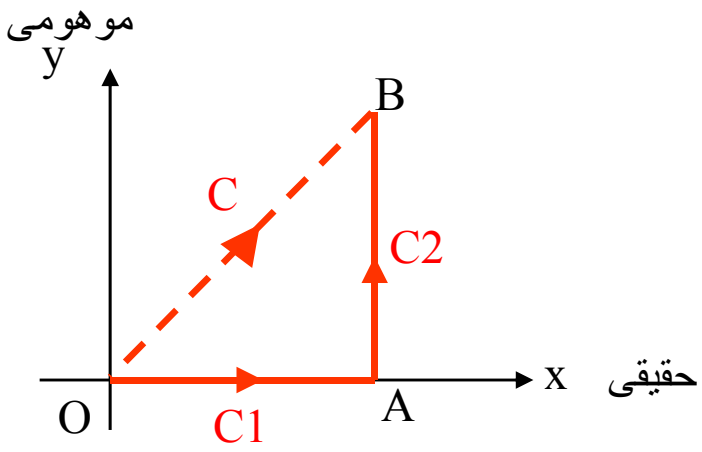


الف) $\int_c f(z)dz = \int_a^b f(z(t))\, dz(t)$

ب) $\int_c f(z)\, dz = \int_{c1} f(z)\, dz + \int_{c2} f(z)\, dz$

$c = c_1 + c_2$

مثال) از تابع $w = z^2$ الف – در طول OB ب – در طول OAB انتگرال بگیرید .



$$OB = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ y = x \end{cases}$$

$$OB = \begin{cases} x = x & 0 \le x \le 1 \\ y = x \end{cases}$$

$$dz = (1+i)dx \quad , \quad z^2 = (1+i)^2 x^2 \quad , \quad z = x + ix = x(1+i)$$

$$\int_{OB} z^2 dz = \int_0^1 (1+i)^3 x^2 dx = \frac{(1+i)^3}{3}$$

انتگرال بر OAB چنین

$$\int_{OAB} z^2 dz = \int_{OA} z^2 dz + \int_{AB} z^2 dz$$

معادلات پارامتری OA وAB به ترتیب عبارتند از :

$$OA : \begin{cases} x = x \\ y = 0 \end{cases} \quad 0 \le x \le 1 \quad ; \quad AB : \begin{cases} x = 1 \\ y = y \end{cases} \quad 0 \le y \le 1 \; ;$$

و بر OA داریم :

$$dz = dx \quad , \quad z^2 = x^2 \quad , \quad z = x$$

و بر AB داریم :

$$dz = idy \quad , \quad z^2 = (1+iy)^2 \quad , \quad z = 1+iy$$

پس :

$$\int_{OAB} z^2 dz = \int_0^1 x^2 dx + i\int_0^1 (1+iy)^2 dy = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(1+iy)^3 \Big|_0^1 = \frac{(1+i)^3}{3}$$

مثال) از تابع $w = \frac{1}{z}$ در طول دایره یکه و در جهت مثلثاتی انتگرال بگیرید.

$$z = e^{i\theta}; 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$dz = ie^{i\theta} d\theta$$

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta}} = 2\pi i$$

مثال) از تابع $w = \frac{1}{z^2}$ در طول دایره یکه در جهت مثلثاتی انتگرال بگیرید.

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta} d\theta}{e^{2i\theta}} = i\int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta = 0$$

و به طور کلی می توان ثابت کرد ؛

$$\boxed{\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 0 & ; \quad n \neq 1 \\ 2\pi i & ; \quad n = 1 \end{cases}}$$